УДК 621.317:389.14

Бабак С.В.[1]***, Куц Ю.В.***[2]

[1]Державне підприємство «НТЦ новітніх технологій НАН України». Україна, м. Київ
[2]Інститут технічної теплофізики НАН України. Україна, м. Київ

ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ КРУГОВИХ СТАТИСТИК В СИСТЕМАХ КОНТРОЛЮ НА БАЗІ БЕЗПІЛОТНИХ АВІАЦІЙНИХ КОМПЛЕКСІВ

Під час оброблення експериментальних даних в системах контролю на базі безпілотних авіаційних комплексів виникає задача аналізу кутових розподілів та визначення кругових статистик. Досліджено метод вибіркових тригонометричних моментів для формування розширеної невизначеності типу А кругового середнього, що ґрунтується на даних спостережень випадкових кутів з апріорно невідомими розподілами ймовірності. Наведено результати моделювання для вибіркових значень випадкового кута з гауссівським намотаним розподілом ймовірності.

Ключові слова: *кругове середнє; тригонометричні моменти; розширена невизначеність.*

Вступ

Використання безпілотних авіаційних комплексів (БАК) в комп'ютеризованих інформаційно-вимірювальних системах забезпечує оперативне отримання значних за обсягом даних з великих за розмірами ділянок простору. В цих системах БАК використовуються як засіб транспортування сенсорів для вимірювання різних фізичних величин. Подібна організація процесу вимірювань є незамінною для розв'язання багатьох практичних задач, зокрема задача контролю довкілля об'єктів енергетики в штатних і нештатних режимах роботи [1, 2]. Інформаційно-вимірювальні системи на базі таких комплексів набувають нових можливостей і перетворюються на більш ефективні інструменти підтримки енергетичної безпеки [3].

Накопичення первинної вимірювальної інформації в системах з БАК здійснюється під час руху безпілотних літальних апаратів у просторі за замкненими траєкторіями, які охоплюють об'єкт контролю. Одним з важливих завдань оброблення отриманих експериментальних даних є оцінювання просторового розподілу концентрації шкідливих викидів та визначення найбільш імовірних напрямків їх поширення у просторі. Загальний підхід до вирішення таких задач ґрунтується на використанні методів статистичного аналізу кутових спостережень [4].

В системах контролю параметрів довкілля особливі вимоги висуваються до оцінок точності результатів кутових спостережень. Процес формування таких оцінок ускладнений тим, що вимірювані параметри мають ймовірнісний характер, а їх закони розподілу не узгоджуються зі стандартними розподілами.

В роботі розглянуто формування інтервальних оцінок кругових статистик на основі емпіричних розподілів даних кутових спостережень.

Розв'язання поставленої задачі

Під час оброблення експериментальних даних і визначення їх кутових розподілів виникає необхідність дослідження реалізацій випадкових кутів та їх статистичного опрацювання. Випадкові кути, як математичні об'єкти, мають характерну особливість — розподіли ймовірності на колі. Це вимагає застосування до вибірок випадкових кутів відповідних способів опрацювання та оцінювання статистичних характеристик. Такими характеристиками є тригонометричні моменти, кругові середнє та дисперсія, кругові мода та медіана тощо [4,5].

Формування надійних оцінок результатів вимірювання кутових величин в загально прийнятій формі передбачає визначення показників їх якості. В міжнародній практиці вимірювань загальновизнаною оцінкою якості результату вимірювань є невизначеність (uncertainty) [6]. Відомі методи формування інтервальних оцінок точності на основі концепції невизначеності [7, 8] розроблені для розподілених на прямій випадкових величин і здебільшого виходять з гіпотези про гауссівський або інший відомий симетричний розподіл похибок вимірювань. Такий підхід можна застосувати до кутових даних у випадках, коли область значень кутів — інтервал значень 0-2π, поділяється більш ніж на 100 клас-інтервалів, а середньоквадратичне відхилення кутових даних значно менше за π. Ці обмеження часто викликані прагненням спростити модель процесу вимірювання і не мають достатнього обґрунтування, тому такий підхід для визначення інтервальних оцінок кутів призводить до грубих похибок, обумовлених рядом причин. По-перше, кількість клас-інтервалів, у випадку проведення реальних вимірювальних експериментів, зазвичай є значно меншою за 100. По-друге, навіть позитивний результат, який дають критерії перевірки несуперечливості гіпотези про гауссовість даних, не гарантує достовірність висновку про належність вибірки до генеральної сукупності з гауссівським розподілом. По-третє, емпіричні розподіли кутів часто є несиметричними та багатомодальними, що обумовлено одночасним впливом множини різних чинників.

В роботах [4, 5] обґрунтовано зв'язок щільності імовірності випадкових кутів з їх тригонометричними моментами, але особливостям практичного використання цього важливого теоретичного результату не приділено достатньої уваги.

Основною метою роботи є обґрунтування і дослідження методу вибіркових тригонометричних моментів для оцінювання щільності розподілу ймовірності кутів і визначення на цій основі розширеної невизначеності їх статистик.

Постановка задачі

Виконується вимірювальний експеримент з випадковим кутом $\vartheta(\omega)$, де ω — елементарна подія з області подій Ω, тобто $\omega \in \Omega$, $\vartheta(\omega) \in [0,2\pi)$. Щільність ймовірності кута $p(\theta)$ відома. В наявності є вибірка $\overline{\theta} = (\theta[1],...\theta[j],...\theta[N])$, $\theta[j] \in [0,2\pi)$ обсягу N, елементи якої вважаються статистично незалежними. Необхідно за $\overline{\theta}$ визначити оцінку кругового середнього кута і його розширену невизначеність, використавши для цього отриманий через вибіркові тригонометричні моменти емпіричний розподіл кута.

Результати дослідження

Дослідження виконані шляхом комп'ютерного моделювання вимірювального експерименту. Сутність методу апроксимації розподілів кутових даних вибірковими тригонометричними моментами ґрунтується на відомому зв'язку щільності розподілу $p(\theta)$ випадкових кутів з їх тригонометричними моментами [4, 6]

$$p(\theta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{f}_n(0)e^{-in\theta} \qquad (1)$$

Вираз (1) являє розклад $p(\theta)$ в ряд Фур'є за тригонометричними моментами $\dot{f}_n$ порядку $n = 0, \pm1, \pm2, ...$, визначеними відносно нульового початкового напрямку. За означенням тригонометричний момент $\dot{f}_n(0)$ порядку n випадкового кута $\vartheta(\omega) \in [0,2\pi)$ зі щільністю розподілу $p(\theta)$ є комплекснозначною функцією, що визначається для цілих значень $n = 0, \pm1, \pm2, ...$

$$\dot{f}_n(0) = \mathbf{M}\left\{\exp\left(in\vartheta(\omega)\right)\right\}, \qquad (2)$$

де $\mathbf{M}$ — оператор математичного сподівання, $i = \sqrt{-1}$.

Тригонометричні моменти $\dot{f}_n(0)$ порядку n мають представлення в декартовій і полярній системах координат

$$\dot{f}_n = a_n(0) + ib_n(0) = \rho_n \exp(i\mu_n), \qquad (3)$$

де дійсні числа $\{a_n(0),\ b_n(0)\}$ отримують відносно нульового напрямку $\theta = 0$:

$$a_n(0) = \mathbf{M}\left\{\cos\left(n\vartheta(\omega)\right)\right\},\ b_n(0) = \mathbf{M}\left\{\sin\left(n\vartheta(\omega)\right)\right\}, \qquad (4)$$

$$\rho_n = \sqrt{a_n^2(0) + b_n^2(0)},\quad \mu_n(0) = Arg\ \dot{f}_n(0). \qquad (5)$$

Метод апроксимації розподілів ймовірності кутів на основі вибіркових тригонометричних моментів [9] ґрунтується на заміні у виразі (1) тригонометричних моментів порядку n випадкового кута $\vartheta(\omega)$ їх оцінками. Для задачі, що розглядається такі оцінки — вибіркові тригонометричні моменти, отримують з вибірки $\overline{\theta}$:

$$\dot{Q}_n(0) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{in\theta[j]} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\cos n\theta[j] + \frac{i}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin n\theta[j] = C_n(0) + iS_n(0). \qquad (6)$$

В (6) $C_n(0)$, $S_n(0)$ — це відповідно вибіркові косинус- та синус-моменти кута n-го порядку.

За обмеженого значенням $n_{гр}$ порядку врахованих тригонометричних моментів отримаємо апроксимацію розподілу (1) виду

$$p^{*}(\theta) \approx \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-n_{гр}}^{n_{гр}} \dot{Q}_n(0)e^{-in\theta}. \qquad (7)$$

Цей метод, на відміну від інших, задовільно апроксимує не тільки одномодальні, але й двомодальні розподіли ймовірності випадкових кутів в умовах їх значної асиметрії. Проте за умови скінченного обсягу вибірки апроксимаційні криві мають характер осциляцій і можуть набувати незначних від'ємних значень, що не відповідає сутності ймовірнісної міри. Дослідимо це явище і можливі шляхи подолання його негативного впливу на визначення інтервальних оцінок точності кутових статистик на прикладі задачі апроксимації розподілу ймовірності випадкового кута ϑ з намотаним гауссівським розподілом. Такий розподіл виникає під час нелінійного перетворення випадкової величини ξ виду

$$\vartheta = \xi(\operatorname{mod} 2\pi), \qquad (8)$$

є характерним для значного кола практичних задач і достатньо просто реалізується у комп'ютерному моделюванні вимірювального експерименту в будь-якому середовищі інженерних розрахунків. В результаті нелінійного перетворення (8) область значень ϑ приводиться до інтервалу $[0,2\pi)$.

Нехай випадкова величини ξ підпорядкована намотаному гауссівському розподілу і має наступні характеристики: математичне сподівання $\mathbf{M}\xi = 1$, дисперсія $\mathbf{D}\xi = 0{,}5$, а обсяг вибірки $N = 10000$. Для побудови гістограми вибірки розділимо інтервал $[0,2\pi)$ на $k = [1 + \log_2 N]^+ = [1 + \log_2 10000]^+ = 14$ рівномірних інтервалів. Графік генерованої вибірки та відповідна гістограма приведені на рис. 1 *а, б*.

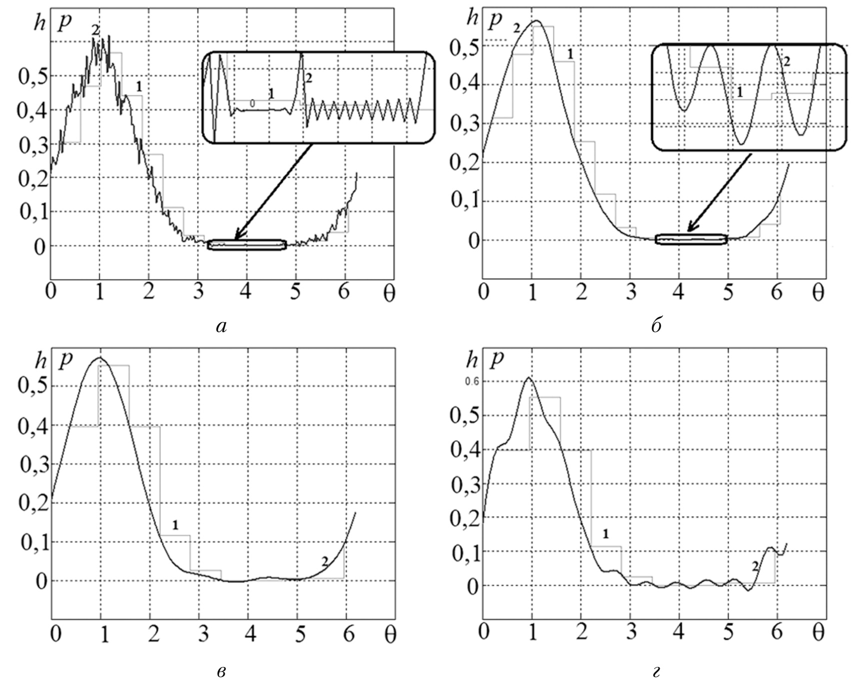


Рис. 2. Гістограми (криві *1*) та графіки апроксимованої (криві *2*) щільності ймовірності вибірки випадкового кута з намотаним гауссівським розподілом та (*а*) і (*б*) для вибірки $N = 10000$ та (*в*) і (*г*) для $N = 500$

Виконаємо апроксимацію щільності розподілу ймовірності для отриманої вибірки, обмеживши порядок тригонометричних моментів граничними значеннями $n_{гр} = 100$ і $n_{гр} = 10$. Значення щільності імовірності визначимо за виразом (7) на рівномірній ґратці кутів $[0, 0{,}01\pi, 0{,}02\pi, ..., 1{,}99\pi]$. Отримані графіки $p(\theta)$ у порівнянні з початковою гістограмою наведені відповідно на рис. 2 *а, б*.

Для порівняння на рис. 2 *в, г* наведено відповідно гістограму та графік апроксимованої щільності ймовірності вибірки кутів меншого обсягу $N = 500$, для якої $k = [1 + \log_2 N]^+ = [1 + \log_2 500]^+ = 10$, крок ґратки кутів — 0,025.

З аналізу цих графіків можна зробити наступні висновки.

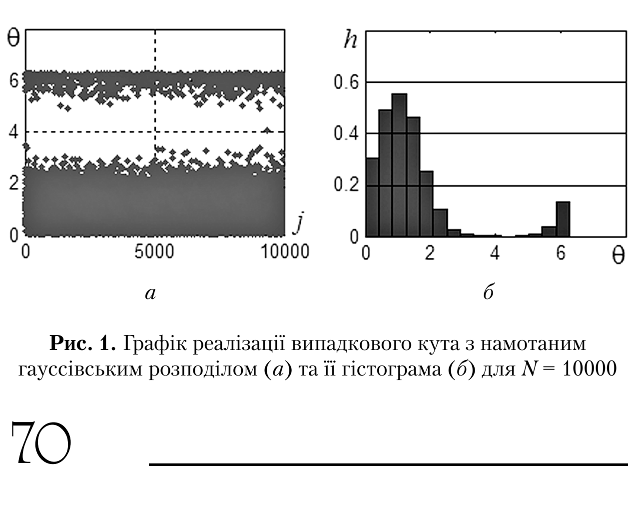


Рис. 1. Графік реалізації випадкового кута з намотаним гауссівським розподілом (*а*) та її гістограма (*б*) для $N = 10000$

1. У випадку збільшення $n_{гр}$ зростає високочастотна («шумова») складова графіка щільності, а зі зменшенням $n_{гр}$ графік стає більш гладким.

2. Спостерігається знакозмінна осциляція близьких до нуля значень щільності.

3. Зі збільшенням $n_{гр}$ частота осциляцій графіку в околі нуля збільшується, а їх амплітуда дещо зменшується (у проведених експериментах ці значення змінювались від ~0,001 до ~0,002).

Незначні за величиною від'ємні значення можна скоригувати шляхом їх заміни на нульові. Така заміна збільшить похибку апроксимації лише на $10^{-5} \div 10^{-4}$, що суттєво не впливає на похибку формування інтервальних оцінок.

Дослідимо збіжність процесу апроксимації. З цією метою виконаємо апроксимацію попередньо отриманої вибірки кутів обсягу $N = 500$ різною кількістю тригонометричних моментів. На рис. 3 представлено результати апроксимації для $n_{гр} = \{2, 4, 8, 16\}$ (зірочками позначено вузли апроксимації).

З аналізу наведених графіків випливає, що при збільшенні $n_{гр}$ спочатку спостерігається наближення кривої $p(\theta)$ до щільності розподілу випадкового кута із заданими характеристиками, а потім відбувається суттєве зростання осциляцій цієї кривої. Шляхом моделювання встановлено, що доцільно обирати $n_{гр}$ інтервалу $[0{,}5k - 1]^+ \pm 1$. В цьому випадку досягається певний компроміс між рівнем осциляцій і відхиленням даних у вузлах апроксимації.

Одним з факторів, що обмежують точність визначення інтервальних оцінок, є наявність у отриманих наближеннях для щільності імовірності випадкових кутів ділянок з від'ємними значеннями. Виконане моделювання засвідчило, що їх питомий внесок у розрахунок імовірності не перевищує 1%. Проте їх вплив може бути дещо зменшений, наприклад шляхом прирівнювання нулю від'ємних значень з подальшим нормуванням щільності ймовірності

$$p^{'}(\theta) = \frac{p(\theta)\cdot \mathrm{sign}\left(p(\theta)\right)}{\int\limits_0^{2\pi} p(\theta)\mathrm{sign}\left(p(\theta)\right)d\theta}, \quad (9)$$

де знакова функція

$$\mathrm{sign}\left(p(\theta)\right) = \begin{cases} 1, p(\theta) > 0, \\ 0, p(\theta) \le 0. \end{cases} \quad (10)$$

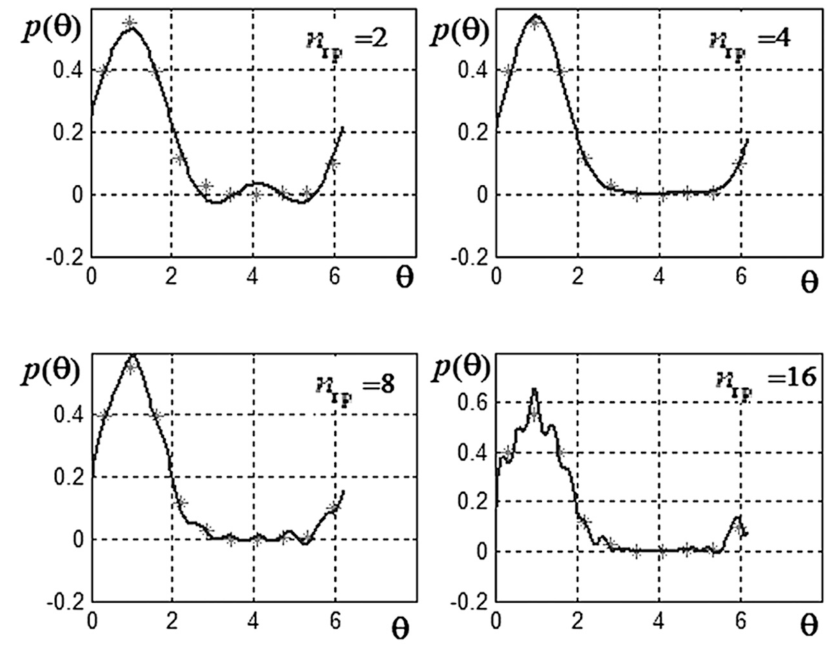


Рис. 3. Апроксимація емпіричного розподілу щільності ймовірності за вибіркою випадкового кута обсягу N = 500 для різних значень

Отримана в такий спосіб щільність ймовірності випадкового кута можна використати для визначення інтервальних оцінок результату одиничного вимірювання. Ця задача має певну специфіку порівняно з інтервальним оцінюванням випадкових величин [7,8], що ілюструє рис.4.

Значення рівня довіри $P_Д$ (ймовірності того, що значення вимірюваного кута належить інтервалу ($\theta_н$, $\theta_в$)) зазвичай обирається з інтервалу (0,8...0,95) і обґрунтовується для кожної конкретної вимірювальної задачі. Скориставшись визначеною раніше щільність $p^{'}(\theta)$ можна знайти значення $\theta_в$, $\theta_н$ шляхом розв'язання інтегрального рівняння

$$\int\limits_{\theta_н}^{\theta_в} p^{'}(\theta)d\theta = P_д. \quad (11)$$

Для врахування можливих переходів верхньої і нижньої межі розширеної невизначеності $\theta_в$, $\theta_н$ через значення $\theta = 0$ та з урахуванням того факту, що для несиметричних розподілів $U^+ \pm U^-$, запропоновано їх визначення за наступними виразами

$$U^+ = \theta_в - \theta_с + 2\pi I(\theta_с, \theta_в), U^- = \theta_с - \theta_н + 2\pi I(\theta_с, \theta_н), \quad (12)$$

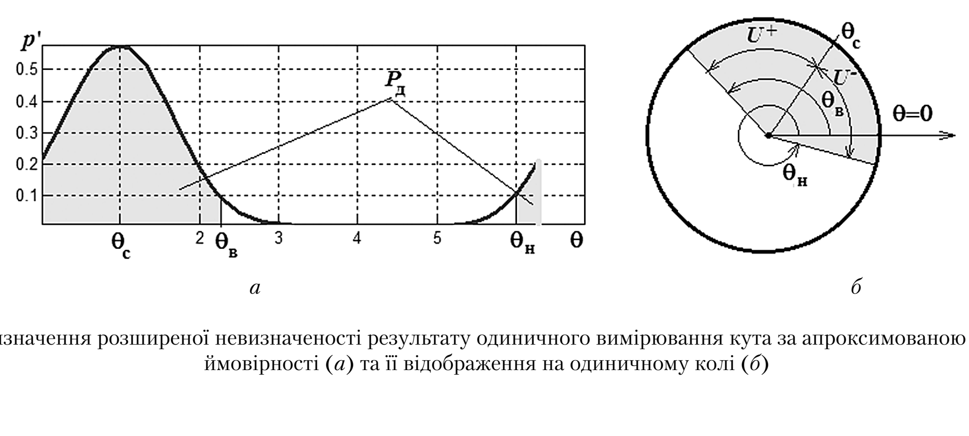
де індикаторні функції визначаються як

$$I\left(\theta_с, \theta_в\right) = \begin{cases} 1, \ \theta_в < \theta_с \\ 0, \ \theta_в \ge \theta_с \end{cases} \quad I\left(\theta_с, \theta_н\right) = \begin{cases} 1, \ \theta_н > \theta_с \\ 0, \ \theta_н \le \theta_с \end{cases} \quad (13)$$

Вибіркове кругове середнє визначається з тригонометричних моментів [4]

$$\theta_с = \mathrm{arctg}\frac{S_1(0)}{C_1(0)} + \frac{\pi}{2}\left\{2 - \mathrm{sign}S_1(0)\left(1 + \mathrm{sign}C_1(0)\right)\right\}. \quad (14)$$

З урахуванням того, що $\theta_с$ визначається за вибіркою з N незалежними значеннями та несиметричною в загальному випадку відносно $\theta_с$ щільності імовірності випадкового кута, отримаємо наступні вирази для визначення границь розширеної невизначеності для $\theta_с$



а *б*

Рис. 4. Визначення розширеної невизначеності результату одиничного вимірювання кута за апроксимованою щільністю ймовірності (*а*) та її відображення на одиничному колі (*б*)

$$U_{\text{c}}^{+} = \frac{\theta_{\text{в}} - \theta_{\text{c}} + 2\pi I\left(\theta_{\text{c}}, \theta_{\text{в}}\right)}{\sqrt{N}},$$
$$U_{\text{c}}^{-} = \frac{\theta_{\text{c}} - \theta_{\text{н}} + 2\pi I\left(\theta_{\text{c}}, \theta_{\text{н}}\right)}{\sqrt{N}}, \quad (15)$$

Отримані емпіричні щільності ймовірності кутів можуть бути використані у комп'ютерному моделюванні вимірювальних експериментів для генерування вибірок випадкових кутів.

Висновки

1. Запропоновано підхід до оброблення кутових даних в системах дистанційного контролю на базі БАК, який ґрунтується на апроксимації емпіричних щільностей ймовірності кутових даних за методом вибіркових тригонометричних моментів, що дозволяє визначати інтервальні оцінки середніх кутів зміни у просторі різних фізичних величин за умови апріорної невизначеності розподілу генеральної сукупності, незалежно від її симетрії та кількості мод.

2. Розроблено спосіб оброблення кутових даних, який ґрунтується на апроксимації емпіричної щільності ймовірності кутових даних і дозволяє визначати розширену невизначеність середніх кутів за умови апріорної невизначеності розподілу генеральної сукупності і незалежно від його симетрії.

3. Використання індикаторної функції для оцінювання розширеної невизначеності результатів кутових вимірювань.

4. Обґрунтовано значення необхідної кількості і порядку тригонометричних моментів в залежності від обсягу вибірки в задачі апроксимації щільності кутових розподілів, що дозволяє досягнути компромісу між рівнем осциляцій і відхиленням даних у вузлах апроксимації для оцінок щільності ймовірності випадкових кутів.

Література

[1] Бабак В.П., Канченко В.А., Ключников А.А., Краснов В.А., Чепур Н.Л. Беспилотные авиационные комплексы как средство радиационного мониторинга АЭС и окружающей среды // Проблеми безпеки атомних електростанцій і Чорнобиля. — 2012. — Вип.19. — С. 60-69.

[2] Статистическая диагностика электротехнического оборудования / С.В. Бабак, М.В. Мыслович, Р.М. Сысак. — К.: Ин-т электродинамики НАН Украины, 2015. — 456 с.

[3] Стогній Б. С., Кириленко О.В., Денисюк С.П. Енергетична безпека України. Світові та національні виклики. — К. : Українські енциклопедичні знання, ТЕКСТ, 2006. — 408 с.

[4] Мардиа К. Статистический анализ угловых наблюдений: Пер. с англ. — М.: Главная ред. физ.-мат. лит. изд-ва "Наука", 1978. — 240 с.

[5] Fisher N.I. Statistical analysis of circular data. — Cambridge University Press, 2000. —277 p.

[6] Guidelies for the Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration: Doc. 19 / Western European Calibration Cooperation, 1990. — 17 p.

[7] Захаров И.П, Кукуш В.Д. Теория неопределенности в измерениях. — Харьков: Консул, 2002. — 256 с.

[8] Циделко В.Д., Яремчук Н.А. Невизначеність вимірювання. Обробка даних і подання результату вимірювання. — К.: ІВЦ «Вид-во «Політехніка»», 2002. — 176 с.

[9] Куц Ю.В., Шенгур С.В., Мельник О.С. Дослідження методу вибіркових тригонометричних моментів в задачах апроксимації розподілів кутових даних // Системи обробки інформації — 2015. — №6(131). — С.111-115.

***Babak S.V.*[1], *Kuts Y.V.*[2]**

[1] **State Enterprise "Scientific and technical center of emerging technologies of National Academy of Science of Ukraine ". Ukraine, Kyiv**
[2] **Institute of technical thermophysics of National Academy of Science of Ukraine. Ukraine, Kyiv**

EVALUATION OF CIRCULAR STATISTICS UNCERTAINTY IN CONTROL SYSTEMS BASED ON UNMANNED AERIAL COMPLEXES

While processing experimental data in control systems based on unmanned aerial complexes there is the task of angular distributions analyzing and circular statistics determining. Method of selective trigonometric moments for forming of circular average expanded uncertainty, based on random corners observational data with priori unknown probability distributions was studied. Simulation results for sample values of random corners with Gaussian plied distribution probability are presented.

Keywords: circular average; trigonometric moments; extended uncertainty.

References

[1] Babak V.P., Kanchenko V.A., Kluchnikov A.A., Krasnov V.A., Chepur N.L. Bespilotnye aviatsionnye kompleksy kak sredstvo radiatsionnogo monitoringa AES i okruzhayushchey credy // Problemy bezpeky atomnykh elektrostantsiy I Chernobylya. – 2012. – Vyp.19. – S. 60-69.

[2] Statisticheskaya diagnostika elektrotekhnicheskogo oborudovaniya /S.V. Babak, M.V. Myslovich, R.M. Sysak. – K.: In-t elektrodinamiki NAN Ukrainy, 2015. – 456 s.

[3] Stogniy B. S., Kirilenko O.V., Denicyuk S.P. Energetychna bezpeka Ukrainy. Svitovi ta natsionalni vyklyki. – K. : Ukrainski entsiklopedichni znannya, TEXT, 2006. – 408 s.

[4] Mardia K. Ststicheskiy analiz uglovych nablyudeniy: Per. s angl. – M.: Glavnaya red. fiz.-mat. lit. izd-va “Nauka”, 1978. – 240 s.

[5] Fisher N.I. Statistical analysis of circular data. – Cambridge University Press, 2000. –277 p.

[6] Guidelies for the Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration: Doc. 19 / Western European Calibration Cooperation, 1990. – 17 p.

[7] Zacharov I.P., Kukush V.D. Teoriya neopredelyonnosti v izmereniyach. – Kharkov: Konsul, 2002. – 256 s.

[8] Tsydelko V.D., Yaremchuk N.A. Nevyznachenist vymiryuvanny. Obrobka danych i podannya rezultatu vymiryuvannya. – K.: IVTS «Vyd-vo «Politechnika»», 2002.–176 s.

[9] Kuts Y.V., Shengur S.V., Melnik O.S. Doslidzhennya metodu vybirkovykh trygonometrychnykh momentiv v zadachakh aproksymazii rozpodiliv kutovykh danykh // Systemy obrobky informazii – 2015. - №6(131). – S.111-115.