УДК 539.374.001

Чигиринский В.В.[1], *Плахотник В.В.*[2], *Шевченко В.Г.*[3]
[1] **Запорожский национальный технический университет. Украина, г. Запорожье**
[2] **Государственное высшее учебное заведение «Национальный горный университет». Украина, г. Днепропетровск,**
[3] **Запорожский национальный технический университет. Украина, г. Запорожье**

О НЕКОТОРЫХ ПОДХОДАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Анотація

Розглядається плоска задача теорії пружності в полярних координатах. В багатьох випадках при вирішенні цієї задачі ефективним є використання функції напружень, що дозволяє сформувати певну модель об'єкта досліджень. Рішення плоскої задачі теорії пружності в полярних координатах представляє функцію напружень як добуток гармонійних функцій залежних від координат ρ, φ. Запропоноване в статті рішення задачі є більше загальним у порівнянні з відомими.

Aabstract

<u>Purpose.</u> Using the object model to generate a voltage to study elasticity problem of flat in polar coordinates and a more general solution.

<u>Design/methodology/approach.</u> Viewed flat task elasticity in polar coordinates. In many cases, effective in meeting this challenge is to use the voltages that generate an object model. The flat task elasticity in polar coordinates gives the expression function of voltage as the product of harmonic functions depend on the coordinates.

<u>Findings.</u> Reviewed flat task elasticity in polar coordinates. Received expressions to determine the function of voltage in the form of works of harmonic functions.

<u>Originality/value.</u> Proposed in article solution is more common in comparison with known.

Рассматривается плоская задача теории упругости в полярных координатах. Аналогичная задача была решена в декартовых координатах в работах [1], [2]. Общие подходы решения указанных задач получены ранее, их можно найти в работе [3]. Однако в литературе появляются частные решения конкретных задач теории упругости, что вызывает необходимость их уточнения, корректировки и дальнейшего развития. Рассмотрим один из подходов определения напряженного состояния деформируемой среды в полярных координатах.

Введение

Постановка задачи уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial\tau_{\rho\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{\sigma_\rho-\sigma\varphi}{\rho}=0;\ \frac{\partial\tau_{\varphi\rho}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial\varphi}+2\frac{\tau_{\varphi\rho}}{\rho}=0, \quad (1)$$

уравнение неразрывности деформаций

$$\nabla^2\left(\sigma_\rho+\sigma_\varphi\right)=0, \quad (2)$$

граничные условия

$$\tau_n=-\beta\cdot\sin\left(A\Phi-2\alpha\right), \quad (3)$$

где β — функция координат ρ, φ, подлежащая определению; А — константа; Φ — аргумент тригонометрической функции координат ρ, φ.

Из (3) следует, что допускается тригонометрическое распределение касательных контактных напряжений.

Исследование.

При решении задачи пользуются функцией напряжений, удовлетворяющей только одному бигармоническому уравнению [3]

$$\nabla^4\psi=0, \quad (4)$$

или в полярных координатах

(5)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right)=0.$$

Используя функцию напряжений ψ уравнения теории упругости (1)...(3) будут удовлетворены.

В работах [4, 5] предложены решения для определения функций напряжений, включая тригонометрическую форму с использованием (4), (5).

Из постановки задачи видно [3], что поля напряжений и деформаций в упругой области должны описываться гармоническими функциями. При этом сочетание гармонических функций также дает гармоническую функцию. Пусть имеет место сочетание функций в виде

$$\psi_1=C_1\cdot\exp\theta\cdot\sin A\Phi, \quad (6)$$

© Чигиринский В.В., Плахотник В.В., Шевченко В.Г.

$$\psi_2 = C_2 \cdot \exp\theta \cdot \cos A\Phi, \qquad (7)$$

где θ, АФ— гармонические функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа.

Если функцию (6) подставить в уравнение Лапласа, получим дифференциальное уравнение

$$\begin{gathered}\left[\rho^2\theta_{\rho\rho} + \rho\theta_\rho + (\rho\theta_\rho + A\Phi_\varphi)(\rho\theta_\rho - A\Phi_\varphi) + \right.\\ \left. +\theta_{\varphi\varphi} - (\rho A\Phi_\rho + \theta_\varphi)(\rho A\Phi_\rho - \theta_\varphi)\right] \cdot \sin A\Phi + \\ \left[2(\rho^2\theta_\rho \cdot A\Phi_\rho + \theta_\varphi \cdot A\Phi_\varphi) + \rho^2 A\Phi_{\rho\rho} + \right.\\ \left. +\rho A\Phi_\rho + A\Phi_{\varphi\varphi}\right] \cdot \cos A\Phi = 0\end{gathered} \qquad (8)$$

где $\theta_{\rho\rho}$ — вторая частная производная от показателя экспоненты θ по координате ρ; $A\Phi_{\varphi\varphi}$ — вторая частная производная от аргумента тригонометрической функции по координате φ.

Для устранения нелинейности операторов при тригонометрических функциях принимаем попеременно круглые скобки равные нулю, т.е.

$$\begin{gathered}1.\ (\rho\theta_\rho + A\Phi_\varphi) = 0,\ (\rho A\Phi_\rho - \theta_\varphi) = 0; \\ 2.\ (\rho\theta_\rho - A\Phi_\varphi) = 0,\ (\rho A\Phi_\rho + \theta_\varphi) = 0.\end{gathered} \qquad (9)$$

Рассмотрим первый вариант (9)

$$\rho\theta_\rho = -A\Phi_\varphi,\ \rho A\Phi_\rho = \theta_\varphi. \qquad (10)$$

Вторые производные от (10)

$$\begin{gathered}\theta_\rho + \rho\theta_{\rho\rho} = -A\Phi_{\varphi\rho},\ \rho A\Phi_{\rho\varphi} = \theta_{\varphi\varphi}, \\ \rho\theta_{\rho\varphi} = -A\Phi_{\varphi\varphi},\ A\Phi_\rho + \rho A\Phi_{\rho\rho} = \theta_{\varphi\rho}.\end{gathered} \qquad (11)$$

После подстановки соотношений (10) и (11) в (8) убеждаемся, что последнее превращается в тождество. Если в уравнение Лапласа подставить (7) получим тот же результат. Дифференциальные зависимости (10) представляют собой соотношения Коши-Римана для полярных координат. Из них следует, что функции θ и АФ являются гармоническими, т.к. удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 A\Phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial A\Phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2 A\Phi}{\partial\varphi^2} = 0.\end{gathered}$$

В выражениях (3), (6), (7) были введены в рассмотрение указанные выше функции, которые могут быть определены из уравнения Лапласа.

С учетом (6) и (7) функцию напряжений можно представить

$$\psi = C \cdot \exp\theta \cdot (C_1 \sin A\Phi + C_2 \cdot \cos A\Phi). \qquad (12)$$

Выражение (12) можно записать в общем виде

$$\begin{gathered}\psi = \left[C_1 \cdot \exp\theta + C_2 \exp(-\theta)\right] \times \\ \times (C_3 \sin A\Phi + C_4 \cdot \cos A\Phi).\end{gathered} \qquad (13)$$

Следует подчеркнуть, что функции θ и АФ не являются линейно зависимыми от одной координаты [7], имеют более сложное построение от координат ρ, φ. В (14) можно легко перейти к гиперболическим синусам и косинусам, тогда

$$\psi = \left[C_1 \cdot sh\theta + C_2 \cdot ch\theta\right] \cdot (C_3 \sin A\Phi + C_4 \cdot \cos A\Phi). \qquad (14)$$

Если граничные условия позволяют, то (14) можно представить в виде суммы

$$\begin{gathered}\psi = \sum_{k=1}^{n}\left[C_{1k} \cdot sh\theta_k + C_{2k} \cdot ch\theta_k\right] \times \\ \times (C_{3k} \sin A\Phi_k + C_{4k} \cdot \cos A\Phi_k).\end{gathered} \qquad (15)$$

Выражения (6), (7), (12)...(15) удовлетворяют бигармоническому уравнению (4). При этом данное соответствие реализуется не только за счет уравнения Лапласа, приведенного во второй скобке (5), но и за счет свойств гармонической функции входящих в аргументы вводимых построений, что подтверждается в результате сложных и громоздких дальнейших преобразований.

Для определения нормальных напряжений из уравнения равновесия (1), необходимо знать касательное напряжение. Для удовлетворения условий (3) в напряжениях, необходимо

$$\tau_{\rho\varphi} = \beta \cdot \sin A\Phi. \qquad (16)$$

Значение β представим в виде фундаментальной подстановки $\beta = C_\sigma \cdot \exp\theta$, [10], которая используется при решении линейных дифференциальных уравнений, $\theta = \theta(\rho,\varphi)$.

Подставляя (16) в (1), принимая при этом разность нормальных напряжений в виде

$$\sigma_\rho - \sigma_\varphi = 2C_\sigma \exp\theta \cdot \cos A\Phi, \qquad (17)$$

получим после интегрирования

$$\begin{gathered}\sigma_\rho = -C_\sigma \int \frac{1}{\rho} \cdot \theta_\varphi \cdot \exp\theta \cdot \sin A\Phi d\rho - \\ -C_\sigma \int \frac{1}{\rho} \cdot A\Phi_\varphi \cdot \exp\theta \cdot \cos A\Phi d\rho - \\ -2C_\sigma \int \frac{1}{\rho} \cdot A\Phi_\varphi \cdot \exp\theta \cdot \cos A\Phi d\rho + f(\varphi) + C;\end{gathered} \qquad (18)$$

$$\begin{aligned}\sigma_\varphi = &-C_\sigma \int \rho \cdot \theta_\rho \cdot \exp\theta \cdot \sin \text{A}\Phi d\varphi - \\ &-C_\sigma \int \rho \cdot \text{A}\Phi_\rho \cdot \exp\theta \cdot \cos \text{A}\Phi d\varphi - \\ &-2C_\sigma \int \exp\theta \cdot \sin \text{A}\Phi d\varphi + f(\rho) + C.\end{aligned} \quad (19)$$

В дальнейшем соотношение (17) необходимо подтвердить. Его можно представить, как фрагмент функций (12), (13). Выражения (18) и (19) можно упростить. Принимая соотношения (10) появляется возможность перехода от одной переменной интегрирования к другой, тогда

$$\begin{aligned}\sigma_\rho = &-C_\sigma \int \text{A}\Phi_\rho \cdot \exp\theta \cdot \sin \text{A}\Phi d\rho + \\ &+C_\sigma \int \theta_\varphi \cdot \exp\theta \cdot \cos \text{A}\Phi d\rho - \\ &-2C_\sigma \int \frac{1}{\rho} \cdot \text{A}\Phi_\varphi \cdot \exp\theta \cdot \cos \text{A}\Phi d\rho + f(\varphi) + C; \\ \sigma_\varphi = &+C_\sigma \int \text{A}\Phi_\varphi \cdot \exp\theta \cdot \sin \text{A}\Phi d\varphi - \\ &-C_\sigma \int \theta_\rho \cdot \exp\theta \cdot \cos \text{A}\Phi d\varphi - \\ &-2C_\sigma \int \exp\theta \cdot \sin \text{A}\Phi d\varphi + f(\rho) + C.\end{aligned}$$

При такой постановке вопроса интегралы получаются в элементарных функциях

$$\begin{aligned}\sigma_\rho = &C_\sigma \cdot \exp\theta \cdot \cos \text{A}\Phi - \\ &-2C_\sigma \int \frac{1}{\rho} \cdot \text{A}\Phi_\phi \cdot \exp\theta \cdot \cos \text{A}\Phi d\rho + f(\phi) + C; \\ \sigma_\phi = &-C_\sigma \cdot \exp\theta \cdot \cos \text{A}\Phi - \\ &-2C_\sigma \int \cdot \exp\theta \cdot \sin \text{A}\Phi d\phi + f(\rho) + C.\end{aligned} \quad (20)$$

Касательное напряжение $\tau_{\rho\varphi} = C_\sigma \cdot \exp\theta \cdot \sin\text{A}\Phi$.

Покажем, что выражения (20) удовлетворяют соотношению (17) при $f(\rho) = f(\varphi) = 0$. Введем обозначения

$$I_1 = 2C_\sigma \int \frac{1}{\rho} \cdot \text{A}\Phi_\varphi \cdot \exp\theta \cdot \cos \text{A}\Phi d\rho;$$
$$I_2 = 2C_\sigma \int \cdot \exp\theta \cdot \sin \text{A}\Phi d\varphi.$$

Производные

$$\frac{\partial I_1}{\partial \varphi} = \frac{\partial I_2}{\partial \varphi} = 2C_\sigma \exp\theta \cdot \sin \text{A}\Phi;$$
$$\frac{\partial I_1}{\partial \rho} = \frac{\partial I_2}{\partial \rho} = 2C_\sigma \frac{1}{\rho} \exp\theta \cdot \cos \text{A}\Phi.$$

При равенстве частных производных интегралы I_1, I_2 отличаются постоянными интегрирования. Принимается

$$I_1 = I_2 = I.$$

Тогда разность нормальных напряжений принимает вид (17). Таким образом, решение замыкается.

Если решение (20) представить в виде [11]

$$\begin{aligned}\sigma_\rho &= C_\sigma \cdot \exp\theta \cdot \cos \text{A}\Phi - I + \sigma; \\ \sigma_\varphi &= -C_\sigma \cdot \exp\theta \cdot \cos \text{A}\Phi - I + \sigma,\end{aligned} \quad (21)$$

принимая $\sigma = \sigma' + I$, σ' где — составляющая среднего напряжения σ, удовлетворяющая бигармоническому уравнению.

Из этого следует, что интеграл I удовлетворяет уравнению Лапласа и бигармоническому уравнению, входит составной частью в среднее напряжение.

Приведем в соответствие (21) с решениями (6), (7), (12)...(15). Принимая в (13)

$$C_2 = C_3 = 0; C_4 = 1; C_1 = n \cdot C_\sigma,$$

получаем функцию напряжений или среднее нормальное напряжение в виде

$$\sigma' = n \cdot C_\sigma \cdot \exp\theta \cdot \cos \text{A}\Phi, \quad (22)$$

где n — положительное или отрицательное число, определяемое условиями задачи.

Если принять $\sigma' = 0$ ($n = 0$), тогда

$$\sigma_\rho = C_\sigma \cdot \exp\theta \cdot \cos \text{A}\Phi,\ \sigma_\varphi = -C_\sigma \cdot \exp\theta \cdot \cos \text{A}\Phi,$$

следовательно

$$\sigma' = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\varphi}{2} = 0.$$

Определяя разность

$$\sigma_\rho - \sigma_\varphi = 2C_\sigma \exp\theta \cdot \cos \text{A}\Phi,$$

убеждаемся, что она соответствует (17). Используя выражения (21) и (22) имеем

$$\begin{aligned}\sigma_\rho &= (n+1) \cdot C_\sigma \cdot \exp\theta \cdot \cos \text{A}\Phi; \\ \sigma_\varphi &= (n-1) \cdot C_\sigma \cdot \exp\theta \cdot \cos \text{A}\Phi.\end{aligned} \quad (23)$$

В случае (23) реализован сдвиг вдоль оси нормальных напряжений на диаграмме Мора в ту или иную сторону, в зависимости от знака n. Разность нормальных напряжений по (23) также соответствует (17).

Анализ полученных результатов

Полученный результат можно сопоставить с решениями, приведенными в литературе. К примеру, решение Жемочкина [6], в котором функция напряжений представляет собой произведение функций, зависящих от одной переменной. Согласно [6] функция напряжений имеет вид

$$\psi = f(\rho) \cdot \sin\varphi.$$

В этом случае АФ = φ, функция $f(\rho)$ необходимо определить. Согласно (6) можно записать

$$\psi = C_\sigma \exp\theta \cdot \sin А Ф,$$

при этом $\rho\theta_\rho = -АФ_\varphi$, $\rho АФ_\rho = \theta_\varphi$.

Дифференцируя АФ, получим

$$АФ_\varphi = 1,\ АФ_\rho = 0,$$

тогда $\theta_\varphi = 0$ или $\theta = f(\rho)$.

Определим конкретное значение функции θ через соотношение Коши—Римана, запишем

$$\rho\theta_\rho = -1,\ \theta_\rho = -\frac{1}{\rho},$$

отсюда

$$\theta = \ln\frac{D}{\rho}, \text{ следовательно}$$

$$\psi = \exp\left(\ln\frac{D}{\rho}\right) \cdot \sin\varphi = \frac{D}{\rho}\sin\varphi.$$

Последнее выражение соответствует одному из частных решений [6]. Так как предложенные зависимости (6), (7), (12)...(15) носят общий характер можно утверждатьо получении нового решения задачи теории упругости.

Выводы

1. Рассмотрена плоская задача теории упругости в полярных координатах.

2. Получены выражения для определения функций напряжений в виде произведения гармонических функций.

3. Показано, что компоненты тензора напряжений определяются гармоническими функциями координат ρ, φ с ограничениями в виде соотношений Коши—Римана (10).

Литература

1. *V.V. Chygyryns'kyy.* A new solution of the harmonic functions in the theory of plasticity./ V.V. Chygyryns'kyy, V.G. Shevchenko, S.B. Belikov. // Materials and technology 44 (2010) 4, 219...222.

2. *Чигиринський В.В.* Про деякі особливості гармонійних функцій в теорії пружності / Чигиринський В.В., Шевченко В.Г.// «Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні» №2, 2008, с. 102—105.

3. *Лурье А.И.* Теория упругости. М. «Наука», 1970. — 939 с.

4. *Безухов Н.И.* Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М. «Высшая школа», 1968. – 512 с.

5. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966. – 770 с.

6. *Бондаренко Б.А.* Квазиполиноминальные функции и их приложения к задачам теории упругости. / Бондаренко Б.А., Филатов А.Н. – Ташкент: Фан. 1978. – 173 с.

7. *Жемочкин Б.Н.* Теория упругости «Стройвоениздат», 1947. – 250 с.

8. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. – М. Наука. 1981 – 688 с.

9. *Никифоров С.Н.* Теория упругости и пластичности. – М.: Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре. – 1958. — 283 с.

10. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М. Наука, 1977. — 735 с.