

УДК 539.3

Шамарин А.Ю.

ГП "Киевский научно-исследовательский институт гидроприборов". Украина, Киев

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЛОСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ РЕШЕТКОЙ

Анотація

У роботі приведено рішення задачі отримання аналітичних виразів для чисельної оцінки акустичних полів, що створюються круговими гідроелектропружними системами. Приведений приклад використання одержаних виразів для оцінки акустичного поля конкретної системи.

Abstract

It is given in the work the solution of a task of reception of a task of reception of analytical expressions for a numerical valuation of acoustic fields created by circular hydro electro resilient systems. It is also given the example of use of the received expressions for the valuation of acoustic field of concrete system.

Вступление

При решении прикладных задач гидроакустики, возникает вопрос исследования динамических процессов в определенной гидроэлектроупругой системе, в том числе и взаимодействие плоской звуковой волны с цилиндрической решеткой, образованной из пьезокерамических цилиндрических преобразователей и акустического экрана.

В данной работе исследуются физические характеристики полей системы состоящей в общем случае из произвольного числа погруженных в акустическую среду тонкостенных цилиндрических пьезоэлектрических преобразователей, оси которых являются образующими некоторой воображаемой цилиндрической поверхности. Внутри решетки находится еще одна, не перемешивающаяся с внешней, акустическая среда, которая заполняет цилиндрический объем.

Система возбуждается установившейся во времени плоской волной давления.

Преобразователи поляризованы в радиальном направлении и могут иметь закороченные, разомкнутые и замкнутые через нагрузочное сопротивление электроды.

Иными словами имеется круговая антенная решетка внутри, которой находится экран произвольной акустической жесткости.

Постановка задачи

Рассматривается система погруженных в безграничное пространство жидкости тонкостенных пьезопреобразователей, оси которых равноудалены на расстояние L от точки O (рис. 1), т.е. преобразователей, образующих круговую антенную решетку. Число электроупругих цилиндров, их геометрические размеры и расположение, в общем случае произвольны.

Внутри антенной решетки находится акустический экран в виде некоторого цилиндрического объема, ось которого проходит через точку O . Среды, заполняющие указанный цилиндрический объем и безграничное внешнее пространство, имеют разные физические параметры и не перемешиваются.

Преобразователи являются бесконечно длинными, тонкостенными, имеют радиальную поляризацию и могут содержать жидкость во внутренних объемах.

Гидроэлектроупругая система возбуждается плоской волной давления с периодическим законом изменения во времени.

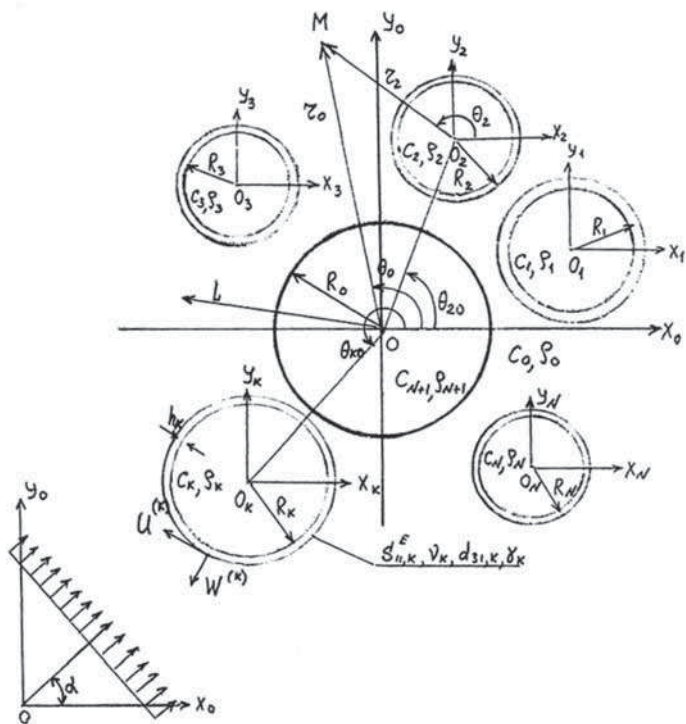
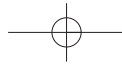


Рис. 1. Нормальное сечение криволинейной системы



Излучаемый динамический процесс моделируется в предположении, что для описания движения элементов антенной решетки оправдано привлечение теории тонких пьезокерамических оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа Лява, а жидких сред — акустической теории.

Аналитическая часть

Введем полярные координаты r_k, θ_k (рис. 1), связанные с каждой из электроупругих оболочек ($k = 1, 2, \dots, N$, где N — число оболочек) и акустическим цилиндром ($k = 0$).

С учетом сделанных допущений, задача состоит в совместном интегрировании уравнений динамики оболочек и возмущенного движения акустических сред

$$\left(1 + \beta_k^2 \mu_k\right) \frac{\partial^2 U^{(k)}}{\partial \theta_k^2} + \frac{\partial W^{(k)}}{\partial \theta_k} - \beta_k^2 \mu_k \frac{\partial^3 W^{(k)}}{\partial \theta_k^3} - \frac{R_k^2}{c_{pk}^2} \frac{\partial^2 U^{(k)}}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial U^{(k)}}{\partial \theta_k} - \beta_k^2 \mu_k \frac{\partial^3 U^{(k)}}{\partial \theta_k^3} + W^{(k)} + \beta_k^2 \mu_k \frac{\partial^4 W^{(k)}}{\partial \theta_k^4} -$$

$$-R_k(1 + \nu_k) d_{31k} t_2^{(k)} + \frac{R_k}{c_{pk}^2} \frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial t^2} = \frac{S_{11k}^E (1 - \nu_k^2) R_k^2}{h_k} q^{(k)},$$

$$(k = 1, 2, \dots, N)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial r_0^2} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial r_0} + \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial \theta_0^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial r_i^2} + \frac{1}{r_i} \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial r_i} + \frac{1}{r_i^2} \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial \theta_i^2} = \frac{1}{c_i^2} \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi^{(N+1)}}{\partial r_0^2} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial \varphi^{(N+1)}}{\partial r_0} + \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial^2 \varphi^{(N+1)}}{\partial \theta_0^2} = \frac{1}{c_{N+1}^2} \frac{\partial^2 \varphi^{(N+1)}}{\partial t^2}$$

$$q^{(k)} = \left[-P^{(0)} + P^{(k)}\right]_{r_k=R_k} \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (3)$$

$$P^{(0)} = -\rho_0 \frac{\partial [\varphi^{(0)} + \phi]}{\partial t}; \quad P^{(i)} = -\rho_i \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial t}$$

$$(i = 1, 2, \dots, N)$$

Здесь $U^{(k)}, W^{(k)}$ — тангенциальная и нормальная составляющие вектора перемещений k -ой оболочки; $q^{(k)}$ — действующая на нее акустическая нагрузка; $E^{(k)}$ — напряженность электрического поля; β_k, μ_k, c_{pk} — постоянные, которые выражаются через параметры k -ой оболочки: модули упругости S_{11k}^E и ν_k , пьезомодуль d_{31} , плотность материала γ_k , а также ее толщину h_k и радиус R_k ; $\varphi^{(i)}$ — потенциал скоростей акустических сред, заполняющих безграничное внешнее пространство ($i = 0$), внутренний объем i -ой ($i = 1, 2, \dots, N$) оболочки и цилиндрический объем, содержащий-

ся внутри антенной решетки ($i = N + 1$); $P^{(i)}$ — соответствующее акустическое давление; c_i, ρ_i — физические параметры (скорость звука и плотность) акустической среды; t — время.

Граничными для сформулированной задачи являются условия непроникания в местах контакта пьезопреобразователей и акустических сред, а также среды, заполняющей безграничное внешнее пространство, с акустическим экраном

$$\left. \frac{\partial [\varphi^{(0)} + \phi]}{\partial r_0} \right|_{r_0=R_0} = \left. \frac{\partial \varphi^{(N+1)}}{\partial r_0} \right|_{r_0=R_0};$$

$$\left. \rho_0 \frac{\partial [\varphi^{(0)} + \phi]}{\partial t} \right|_{r_0=R_0} = \left. \rho_{N+1} \frac{\partial \varphi^{(N+1)}}{\partial t} \right|_{r_0=R_0}$$

$$(5)$$

Для установившихся во времени процессов необходимо выполнение условия Зоммерфельда для потенциала скоростей отраженных и излученных волн $\varphi^{(0)}$. Кроме того, учитывая, что в замкнутых объемах ($r_i < R_i, i = 1, 2, \dots, N + 1$) нет источников, потенциалы скоростей $\varphi^{(i)}$, описывающие возникающие в них возмущения, должны быть ограничены.

Падающая плоская волна давления, распространяющаяся под углом α к оси $O_k X_k$ декартовых координат (рис. 1), задается функцией ϕ , которая в переменных r_k, θ_k ($k = 1, 2, \dots, N$) и r_0, θ_0 имеет вид

$$\phi(r_k, \theta_k, t) = Q e^{-i\omega t + i \frac{\omega}{c_0} [L \cos(\theta_k - \alpha) + r_k \cos(\theta_k - \alpha)]}$$

$$\phi(r_0, \theta_0, t) = Q e^{-i\omega t + i \frac{\omega}{c_0} r_0 \cos(\theta_k - \alpha)}$$

$$(6)$$

В приведенных выражениях Q — амплитуда действующей нагрузки, θ_{k0} — угловая координата O_k в центральной системе координат (r_0, θ_0).

Решая задачу методом разделения пространственных переменных, получим для искомых величин их представление в рядах по собственным формам колебаний (ряды Фурье)

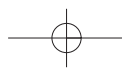
$$W^{(k)} = e^{-i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n^{(k)} e^{in\theta_k}$$

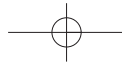
$$(7)$$

$$U^{(k)} = e^{-i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n^{(k)} e^{in\theta_k} \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

$$\varphi^{(0)} = e^{-i\omega t} \sum_{k=0}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_{nk}^{(0)}(r_k) e^{in\theta_k}$$

$$(8)$$





$$\varphi^{(k)} = e^{-i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n^{(i)}(r_k) e^{in\theta_k} \quad (9)$$

$$\varphi^{(N+1)} = e^{-i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n^{(N+1)}(r_0) e^{in\theta_0} \quad (10)$$

Здесь компоненты потенциала скоростей $\varphi^{(0)}$ описывают возмущения во внешнем пространстве, обусловленные пьезокерамическими оболочками ($k = 1, 2, \dots, N$) и акустическим экраном ($k = 0$).

Функции $\varphi_{nk}(0)$, $\varphi_n^{(i)}$, $\varphi_n^{(N+1)}$ удовлетворяют уравнению Бесселя, что следует в результате подстановки выражений (8–10) в формулу (2). Тогда, с учетом условий излучения Зоммерфельда для возмущений в безграничном пространстве и их ограниченности в замкнутых объемах $r_i < R_i$ ($i = 0, 1, \dots, N$), общие решения волновых уравнений (2) имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)} &= e^{-i\omega t} \sum_{k=0}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^{(0)} H_n^{(1)} \left(\frac{\omega}{c_0} r_k \right) e^{in\theta_k} \\ \varphi^{(k)} &= e^{-i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^{(k)} J_n \left(\frac{\omega}{c_k} r_k \right) e^{in\theta_k} \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (11) \\ \varphi^{(N+1)} &= e^{-i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^{(N+1)} J_n \left(\frac{\omega}{c_{N+1}} r_0 \right) e^{in\theta_0} \end{aligned}$$

где $H_n^{(1)}$, J_n — функции n -х порядков Ханкеля первого рода и Бесселя, $A_n^{(0)}$, $B_n^{(k)}$, $B_n^{(N+1)}$ — постоянные интегрирования, которые находятся из граничных условий.

Используя теорему сложения для функции $H_n^{(1)} \left(\frac{\omega}{c_0} r_j \right)$, выполним переразложение потенциала скоростей $\varphi^{(0)}$, представив его в переменных каждой из координатных систем r_k, θ_k ($k = 0, 1, \dots, N$)

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)}(r_k, \theta_k) &= e^{-i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ A_n^{(k)} H_n^{(1)} \left(\frac{\omega}{c_0} r_k \right) + \right. \\ &+ \sum_{j=0}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^{(j)} H_{m-n}^{(1)} \left(\frac{\omega}{c_0} L_{kj} \right) \times \\ &\left. \times J_n \left(\frac{\omega}{c_0} r_k \right) e^{i(m-n)\theta_{kj}} \right\} e^{in\theta_k} \quad (12) \end{aligned}$$

Штрих над суммой означает, что слагаемое $j = k$ отсутствует.

В выражении (12) θ_{kj} , L_{kj} — угловая и радиальная координаты центра k -ой полярной системы O_k в переменных j -ой системы (r_j, θ_j) .

Разложение потенциала падающей волны ϕ (6) в ряд Фурье в принятых координатных системах имеет вид:

$$\begin{aligned} \phi(r_k, \theta_k, t) &= Q e^{-i\omega t + i \frac{\omega}{c_0} L \cos(\theta_{k0} - \alpha)} \times \\ &\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n \left(\frac{\omega}{c_0} r_k \right) e^{-in\alpha} e^{in\theta_k}, \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (13) \end{aligned}$$

$$\phi(r_0, \theta_0, t) = Q e^{-i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n \left(\frac{\omega}{c_0} r_0 \right) e^{-in\alpha} e^{in\theta_0}$$

Акустические давления на поверхностях контакта пьезокерамических оболочек с акустическими средами ($r_k = R_k$, $k = 1, 2, \dots, N$) и на границе соприкосновения внешней среды с акустическим экраном ($r_0 = R_0$) согласно соотношениям (4), (11), (12), (13) также описываются рядами

$$\begin{aligned} P_6^{(0)} &= P^{(0)} \Big|_{r_i=R_i} = e^{-i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n^{(0)}(R_i) e^{in\theta_i} \\ P_6^{(k)} &= P^{(k)} \Big|_{r_k=R_k} = e^{-i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n^{(k)}(R_k) e^{in\theta_k} \quad (14) \\ P_6^{(N+1)} &= P^{(N+1)} \Big|_{r_0=R_0} = e^{-i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n^{(N+1)}(R_0) e^{in\theta_0} \\ &(i = 0, 1, \dots, N) \quad (k = 0, 1, \dots, N) \end{aligned}$$

В случае пьезопреобразователей со сплошными токопроводящими покрытиями для рассмотренных вариантов их коммутации напряженность электрического поля $E_r^{(k)}$ пропорциональна нулевой компоненте прогиба $W_0^{(k)}$.

Далее, уравнения движения оболочек относительно n -ых гармоник перемещений $W_n^{(k)}, U_n^{(k)}$, выразим их через составляющие акустических нагрузок $q_n^{(k)}$.

Для определения постоянных интегрирования, входящих в выражение (11), соотношения (11), (12), (14) подставляются в граничные условия, в результате чего вычисление искомым величин $A_n^{(0)}$, $B_n^{(k)}$, ($k = 1, 2, \dots, N$), $B_n^{(N+1)}$, сводятся к решению следующей бесконечной системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} A_n^{(k)} + \sum_{j=0}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_{nm1}^{(kj)} A_m^{(j)} + G_{n1}^{(k)} B_n^{(k)} &= Q U_{n1}^{(k)}; \\ G_{n2}^{(k)} A_n^{(k)} + \sum_{j=0}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_{nm2}^{(kj)} A_m^{(j)} + B_{n2}^{(k)} &= Q U_{n1}^{(k)}; \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (15) \end{aligned}$$

$$A_n^{(0)} + \sum_{j=1}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_{nm1}^{(0j)} A_m^{(j)} + G_{n1}^{(0)} B_n^{(N+1)} = Q U_{n1}^{(0)};$$

$$G_{n2}^{(0)} A_n^{(0)} + \sum_{j=1}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_{nm2}^{(0j)} A_m^{(j)} + B_{n2}^{(N+1)} = Q U_{n2}^{(0)}.$$



Если пьезопреобразователи не содержат акустических сред во внутренних объемах, бесконечная система (15) упрощается, принимая вид

$$A_n^{(k)} + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_{nm1}^{(kj)} A_m^{(j)} = QU_{n1}^{(k)} \quad (k = 1, 2, \dots, N);$$

$$A_n^{(0)} + \sum_{j=1}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_{nm1}^{(0j)} A_m^{(j)} + G_{n1}^{(0)} B_n^{(N+1)} = QU_{n1}^{(0)}; \quad (16)$$

$$G_{n2}^{(0)} A_n^{(0)} + \sum_{j=1}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_{nm1}^{(0j)} A_m^{(j)} + B_n^{(N+1)} = QU_{n2}^{(0)}.$$

Можно показать, что системы (15) (16) являются квазирегулярными и имеют единственное решение, которое может быть получено методом редукции.

Располагая значениями постоянных $A_n^{(k)}$, B_n не трудно рассчитать физические характеристики изучаемого динамического процесса. Так, согласно выражению (14) определяются давления в акустических средах на поверхностях их контакта

с оболочками, по формулам (3) — действующие на них акустические нагрузки

Асимптотические формулы для расчёта дальнего поля давлений включают составляющую, описывающую возмущение, обусловленную акустическим экраном, расположенным внутри антенной решетки

$$P_D^{(0)} = e^{-i\omega t} i \rho_0 \omega \times \sum_{j=0}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^{(j)} \frac{2}{\sqrt{\pi \frac{\omega}{c_0} r_j}} e^{i\left(\frac{\omega}{c_0} r_j - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + in\theta_j}, \quad (17)$$

где $r_k = \sqrt{L^2 + r_0^2 - 2Lr \cos(\theta_0 - \theta_{k0})}$;

$$\theta_k = \pi - \theta_{k0} - \arctg \frac{r_0 \sin(\theta_0 - \theta_{k0})}{L - r_0 \cos(\theta_0 - \theta_{k0})}.$$

В качестве иллюстрации, применим полученные аналитические выражения для численной

оценки акустических полей, создаваемых круговыми гидроэлектроупругими системами. Система располагается в воде с параметрами $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ и $c = 1500 \text{ м/с}$.

Результаты численной оценки представлены на рис. 2. Расчеты проводились для следующих значений: $N = 4$; $L = 5R$; $R = 0,0675 \text{ м}$; $h = 0,006 \text{ м}$; $R_{\text{э}} = 0,24 \text{ м}$; расстояние в дуге между поверхностями соседних элементов $l = 0,09R$; $f = 4 \text{ кГц}$, 10 кГц ; $z_H = R = 1000 \text{ м}$. Резонансная частота пульсирующих колебаний преобразователей в воде составляла 10 кГц . Количество членов, учитываемых в разложениях полей, выбиралась так, чтобы вклад последнего учитываемого члена не превышал $3\div 4\%$ от суммарного получаемого результата.

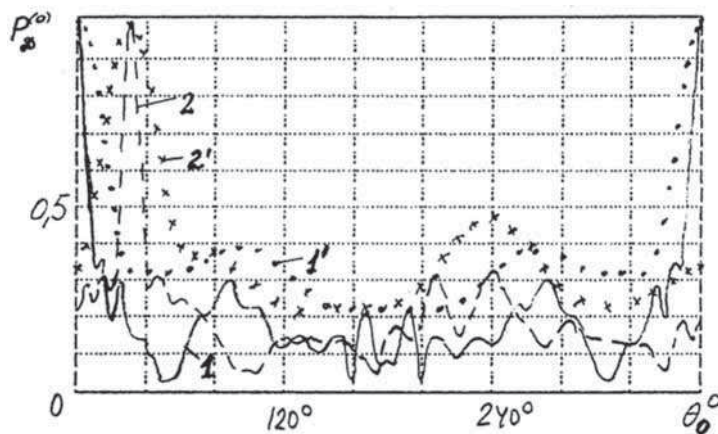


Рис. 2. Угловые зависимости нормализованных акустических давлений рассеянного поля решеток преобразователей с идеально податливым акустическим экраном.

1 — $\alpha = 0^\circ$, $f = 10 \text{ кГц}$; 1 — $\alpha = 0^\circ$, $f = 4 \text{ кГц}$; 2 — $\alpha = 30^\circ$, $f = 10 \text{ кГц}$;
2 — $\alpha = 30^\circ$, $f = 4 \text{ кГц}$.