

УДК 624.073

Корбач В.Г.

Государственное предприятие "Государственное Киевское конструкторское бюро "Луч". Украина, Киев

ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ МНОГОТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Анотація

У роботі приведено рішення задачі отримання аналітичних виразів для чисельної оцінки акустичних полів, що створюються круговими гідроелектропружними системами. Приведений приклад використання одержаних виразів для оцінки акустичного поля конкретної системи.

Abstract

It is given in the work the solution of a task of reception of a task of reception of analytical expressions for a numerical valuation of acoustic fields created by circular hydro electro resilient systems. It is also given the example of use of the received expressions for the valuation of acoustic field of concrete system.

Многоточечные краевые задачи (МТКЗ) для систем обыкновенных дифференциальных уравнений является математической моделью для широкого круга прикладных проблем в различных областях науки и техники. В качестве примера могут быть названы задачи идентификации параметров модели, оптимального управления и др.

Решение задач механики твердого деформированного тела, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных при помощи метода прямых (МП) или коллокации по линиям также можно привести в общем случае к многоточечной краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

При численном решении таких задач возникают трудности, связанные с неустойчивостью счета. Для двухточечных краевых задач проблема преодоления численной неустойчивости разработана достаточно подробно (см., например, [1, 2]), в тоже время многоточечным краевым задачам уделяется гораздо меньше внимания.

Ниже на примере МТКЗ метода прямых излагаются алгоритмы численного решения многоточечной краевой задачи [3], основанные на применении переходных матриц в сочетании с методами дискретной ортогонализации или аппроксимаций Паде.

Метод дискретной ортогонализации разработан как метод решения двухточечных краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных

уравнений [1]. В нем для преодоления проблемы вычислительной неустойчивости вводится механизм ортогонализации компонент решения в дискретном наборе точек интервала решения.

Для аппроксимации аналитических функций одной из лучших является Паде-аппроксимация, при которой заданная функция приближается отношением двух полиномов.

Ниже Паде-аппроксимация используется при решении МТКЗ на этапе вычисления матричной экспоненты.

Рассматривается прямоугольная область Ψ^* (в трехмерном случае — параллелепипед) для которой строится численное общее решение в интервале $[\alpha_0, \alpha_k]$ на всех линиях, введенных в рассмотрение (рис. 1).

Из этого решения путем определения начального вектора в сечении $\alpha = \alpha_0$ выделяется (формируется) частное численное решение, соответствующее конкретной области Ψ , погруженной в Ψ^* , и удовлетворяющее заданным условиям на контуре Γ (в трехмерном случае — заданным условиям на некоторой поверхности).

Требование правильности области в направлении оси α не предъявляется, так как недостающее согласованное число констант интегрирования для линий, пересекающих контур Γ более двух раз, может быть заимствовано у линий, лежащих вне рассматриваемой области Ψ .

Пусть в прямоугольной области Ψ^* , а следовательно и в области Ψ с кусочно гладкой границей Γ , разыскивается решение дифференциального уравнения в частных производных

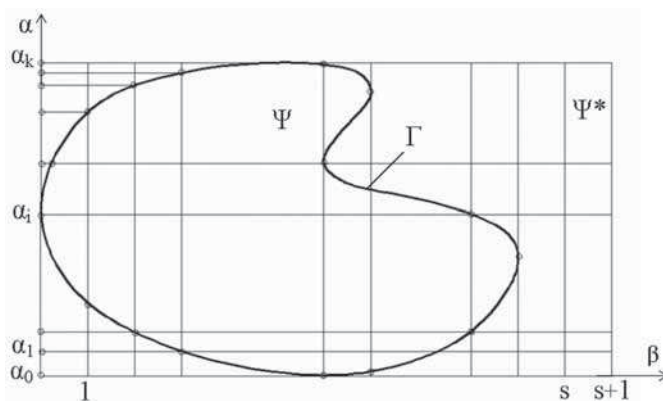
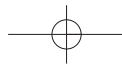


Рис. 1. Схема введения линий МП и точек формулировки краевых условий



$$LU = F, \quad (1)$$

удовлетворяющее на границе Γ необходимому количеству краевых условий, записанных в виде

$$L^*U/\Gamma = 0, \quad (2)$$

где U — вектор состояния рассматриваемого объекта, L, L^* — символы заданных матричных дифференциальных операторов в частных производных, F — грузовой член.

Дифференциально-разностный аналог краевой задачи (1–2) может быть представлен в виде

$$Y' = A(\alpha) \cdot Y + b(\alpha) \quad \alpha \in [\alpha_0, \alpha_k] \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^m B_j \times Y(\alpha_j) = d, \quad \alpha \in [\alpha_0, \alpha_k] \quad (4)$$

Здесь Y — вектор состояния, $A(\alpha)$ — матрица коэффициентов порядка n , структура которой устанавливается на основании оператора U и вида применяемых конечных разностей, $b(\alpha)$ — вектор правой части, B_j — заданная квадратная матрица, d — заданный вектор.

Условия, которые можно сформулировать в m точках пересечения семейства прямых с контуром Γ относятся к разделенным краевым условиям, однако для удобства изложения они записаны в наиболее общем виде (4), характерном для связанных (неразделенных) краевых условий.

Разделим интервал интегрирования $[\alpha_0, \alpha_k]$ системы (3) точками ортогонализации ($i = 1, 2, \dots, k$) на ряд участков в общем случае неравной длины. В число точек ортогонализации входят все точки α_j ($j = 1, 2, \dots, m; m \geq 2$), в которых сформулированы краевые условия (4).

Для переноса начального условия $Y(\alpha_0) = C_0$ в точку α_1 любым численным методом (Эйлера, Рунге-Кутты или др.) на первом участке $[\alpha_0, \alpha_1]$ с необходимой точностью решаем n задач Коши для однородной системы, полученной из (3) при $b = 0$ с начальными условиями, представляющими собою столбцы единичной матрицы. В результате получим матрицу перехода A_1 для интервала $[\alpha_0, \alpha_1]$.

Частное решение Q_1 неоднородной системы (3) получим при нулевом начальном векторе.

Тогда в сечении $\alpha = \alpha_1$ получим:

$$Y(\alpha_1) = A_1 \times C_0 + Q_1, \quad (5)$$

где $C_0 = Y(\alpha_0)$ — вектор начальных условий.

К решению (5) применим метод дискретной ортогонализации [1], после чего получим

$$Y(\alpha_1) = Z_1 \times C_1 + P_1 \quad (6)$$

Здесь Z_1 — матрица ортогонализации; P_1 — ортонормированный вектор; C_1 — вектор констант интегрирования в точке $\alpha = \alpha_1$, который связан с вектором C_0 зависимостью:

$$\Omega_1 \times C_0 = C_1, \quad (7)$$

где Ω_1 — верхняя треугольная матрица, вырабатываемая при ортогонализации векторов матрицы A_1 .

Столбцы матрицы Z_1 будут служить начальными значениями при построении матрицы перехода для участка $[\alpha_1, \alpha_2]$, а вектор P_1 будет начальным при решении системы (3).

Решение для участка $[\alpha_1, \alpha_2]$

$$Y(\alpha_1) = A_2 \times C_1 + Q_2 \quad (8)$$

снова подвергнем процедуру ортогонализации, что дает

$$Y(\alpha_2) = Z_2 \times C_2 + P_2 \quad (9)$$

$$\Omega_1 \times C_0 = C_1 \quad (10)$$

В произвольной точке ортогонализации, а, следовательно, и в точках, в которых сформулированы краевые условия, решение (3) можно записать в виде

$$Y(\alpha_i) = Z_i \prod_{l=1}^i \Omega_l C_0 + P_i, \quad (11)$$

что, в свою очередь, позволяет заданные краевые условия (4) представить следующим образом

$$\left[B_1 + \sum_{j=2}^m \left(B_j Z_j \prod_{l=1}^j \Omega_l \right) \right] C_0 = d - \sum_{j=2}^m (B_j P_j) \quad (12)$$

Полученное выражение (12) устанавливает соотношения, необходимые для определения начального вектора решения C_0 для многоточечных краевых задач как с разделенными, так и со связанными краевыми условиями, включая условия периодичности.

Значения вектора состояния в других точках интервала интегрирования определяются по формуле (11), при этом полученные значения искомого вектора в точках, лежащих вне области Ψ , должны быть отброшены.

Решение системы (3–4), содержащей только постоянные коэффициенты, можно построить на основе матричной экспоненты.

Введем в рассмотрение расширенный вектор состояния, и, не меняя обозначений, систему (3) запишем в виде

$$Y' = AY. \quad (13)$$

В выражение (4) включим необходимое количество дополнительных условий, которые запишем в виде, характерном для связанных (неразделенных) краевых условий

$$\sum_{i=1}^m B_i Y_{\alpha_i} = b. \quad (14)$$

Точное решение системы (13) имеет вид [4]

$$Y(\alpha) = e^{A\alpha} \cdot Y(\alpha_0). \quad (15)$$



Если в (15) положить $\alpha = pT$, где p — целое число, а T — приращение переменной α , получим известное выражение

$$Y(pT) = e^{ApT} \cdot Y((p-1)T), \quad (16)$$

откуда следует

$$Y(pT) = (e^{AT})^p \cdot Y(\alpha_0) = (e^{AT})^p \cdot C_0. \quad (17)$$

Используя (17), осуществим прогонку вектора $Y(\alpha_0)$ из сечения α_0 в сечения α_j , где сформулированы краевые условия (4). Полученные выражения для $Y(\alpha_j)$ подставим в (14)

$$\left[B_1 + \sum_{j=2}^m B_j \cdot (e^{AT})^{P_j} \right] C_0 = B \cdot Y(\alpha_0) = d, \quad (18)$$

где $P_j = \frac{\alpha_j}{T}$.

Решая уравнение (18), получим искомый начальный вектор $C_0 = Y(\alpha_0)$. Значения вектора состояния в других точках интервала интегрирования определяются по формуле (17).

Следует заметить, что координаты точек, где заданы многоточечные граничные условия, должны быть согласованы со значением параметра T .

Остановимся на вычислении переходной матрицы e^{AT} .

Наиболее часто используется разложение матричной экспоненциальной функции в ряд $e^{AT} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A^s T^s}{s!}$, которое, однако, в случае плохой обусловленности матрицы A или значительных интервалов интегрирования приводит к неустойчивому вычислительному процессу.

Для преодоления указанной трудности при вычислении экспоненциальной функции воспользуемся аппроксимацией Паде [5], например, в таком виде:

$$e^{AT} = \left[E - \frac{1}{2}AT + \frac{1}{12}(AT)^2 \right]^{-1} \times \left[E + \frac{1}{2}AT + \frac{1}{12}(AT)^2 \right] + O(T^5) \quad (19)$$

или

$$e^{AT} = \left[E - \frac{1}{2}AT + \frac{1}{10}(AT)^2 + \frac{1}{120}(AT)^3 \right]^{-1} \times \left[E + \frac{1}{2}AT + \frac{1}{10}(AT)^2 + \frac{1}{120}(AT)^3 \right] + O(T^7) \quad (20)$$

где $O(T^5)$, $O(T^7)$ — ошибки аппроксимации.

Известно, что методы, основанные на аппроксимации Паде обладают свойством А и L-устойчивости [6], и, следовательно, можно ожидать, что приведенный алгоритм решения МТКЗ будет слабо чувствителен к влиянию вычислительных погрешностей.

Таким образом, построенное один раз общее численное дискретное решение краевой задачи (1–2) может быть использовано для отыскания решений в областях произвольного очертания, погруженных в Ψ^* , в том числе и с дополнительными условиями в точках, которые лежат внутри области Ψ .

По описанным алгоритмам был решен ряд задач по определению напряженно-деформированного состояния пластин различных очертаний, из которых подробно рассмотрим изгиб анизотропной пластинки, нагруженной равномерно распределенным давлением.

Равновесие такой пластинки или пластинки, изготовленной из ортотропного материала, главные оси упругой симметрии которого повернуты относительно расчетных осей на некоторый угол ϕ , описывается следующим дифференциальным уравнением в частных производных [7]:

$$D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial \beta^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 W}{\partial \alpha \partial \beta^3} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 W}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 W}{\partial \alpha^3 \partial \beta} + D_{22} \frac{\partial^4 W}{\partial \beta^4} = q(\alpha, \beta) \quad (21)$$

где $W(\alpha, \beta)$ — функция прогибов пластинки, $q(\alpha, \beta)$ — внешняя нагрузка, D_{ij} ($i = 1, 2, 6, j = 1, 2, 6$) — жесткости пластины.

Следуя алгоритму метода прямых уравнение (21) аппроксимируем системой обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида (см, например, [8]).

$$Y' = AY + F + N \quad (22)$$

Здесь Y — вектор состояния пластинки, элементами которого есть функция прогибов и ее производные на линиях $i = 1, 2, \dots, s$ $Y = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$, где Y_i ($i = 1, 2, 3, 4$) в свою очередь равны $Y_1 = (w_1, w_2, \dots, w_s)$, $Y_2 = (w_1', w_2', \dots, w_s')$, $Y_3 = (w_1'', w_2'', \dots, w_s'')$, $Y_4 = (w_1''', w_2''', \dots, w_s''')$, а штрихами обозначены производные по α .

В нашем случае:

A^* — квадратная блочная матрица

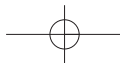
$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{bmatrix},$$

E — единичная матрица порядка n ,

A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) — квадратные матрицы n -порядка, структура которых зависит от вида применяемых конечных разностей, 0 — нулевые матрицы,

F — вектор-столбец длины $4s$,

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q \end{bmatrix}, \quad Q = \frac{1}{D_{22}} (q_1, q_2, \dots, q_s)$$



N — матрица контурных и законтурных функций, т.е. функций прогиба и ее производных на линиях с индексами $-1, 0, s+1, s+2$.

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_{-1} & \varphi_0 & \varphi_{s+1} & \varphi_{s+2} & \varphi_0 & \varphi_{s+1} & \varphi_0 & \varphi_{s+1} & \varphi_0 & \varphi_{s+1} & \varphi_{-1} & \varphi_{s+2} \end{pmatrix}$$

$\varphi_j (j = -1, 0, s+1, s+2)$ — столбцы размером n :

$$\varphi_{-1} = -\frac{D_{11}}{D_{22}} \frac{1}{d^4} (-w_{-1}, 0, \dots, 0)$$

$$\varphi_0 = -\frac{D_{11}}{D_{22}} \frac{1}{d^4} (-4w_0, w_0, 0, \dots, 0)$$

$$\varphi_{s+1} = -\frac{D_{11}}{D_{22}} \frac{1}{d^4} (0, \dots, 0, w_{s+1}, -4w_{s+1})$$

$$\varphi_{s+2} = -\frac{D_{11}}{D_{22}} \frac{1}{d^4} (0, \dots, 0, w_{s+2})$$

$$\varphi_0' = -\frac{2D_{16}}{D_{22}} \frac{1}{d^3} (2w_0', -w_0', 0, \dots, 0)$$

$$\varphi_{s+1}' = -\frac{2D_{16}}{D_{22}} \frac{1}{d^3} (0, \dots, 0, w_{s+1}', -2w_{s+1}')$$

$$\varphi_0'' = -\frac{2(D_{16} + 2D_{66})}{D_{22}} \frac{1}{d^2} (-4w_0'', w_0'', 0, \dots, 0)$$

$$\varphi_{s+1}'' = -\frac{2(D_{16} + 2D_{66})}{D_{22}} \frac{1}{d^2} (0, \dots, 0, -4w_{s+1}'', w_{s+1}'')$$

$$\varphi_0''' = -\frac{2D_{26}}{D_{22}} \frac{1}{d} (-w_0''', 0, \dots, 0)$$

$$\varphi_{s+1}''' = -\frac{2D_{26}}{D_{22}} \frac{1}{d} (0, \dots, 0, w_{s+1}''')$$

$$\varphi_{-1}' = -\frac{2D_{16}}{D_{22}} \frac{1}{d^3} (-w_{-1}', 0, \dots, 0)$$

$$\varphi_{s+2}' = -\frac{D_{16}}{D_{22}} \frac{1}{d^3} (0, \dots, 0, w_{s+2}')$$

$$A_3 = -\frac{2(D_{16} + 2D_{66})}{D_{22}} \frac{1}{d^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = -\frac{2D_{26}}{D_{22}} \frac{1}{d} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Полученные из части граничных условий соотношения между неизвестными контурными и законтурными функциями с одной стороны и функциями на внутрилежащих линиях с другой стороны, позволяют исключить из (22) матрицу N .

Сформулированная таким образом МТКЗ решалась для квадратной пластинки, защемленной по контуру. Схемы введения делительных линий показаны на рис. 2.

В случае многоточечного варианта метода прямых уравнение равновесия (21) для изотропной пластинки ($D_{16} = D_{26} = 0, D_{11} = D_{22} = D_{12} + 2D_{66} = D, \frac{q}{D} = 1$) интегрировалось в области АСВ (учитывалась симметрия по линии АС), а в случае обычного варианта метода прямых рассматривалась область ОФВЕ с соответствующими граничными условиями.

Вектор начальных условий $Y(\alpha_0)$ определялся из уравнения (18).

Матрицы $A_i (i=1, 2, 3, 4)$ имеют вид

$$A_1 = \frac{D_{11}}{D_{22}} \frac{1}{d^4} \begin{pmatrix} 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = -\frac{2D_{16}}{D_{22}} \frac{1}{d^3} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

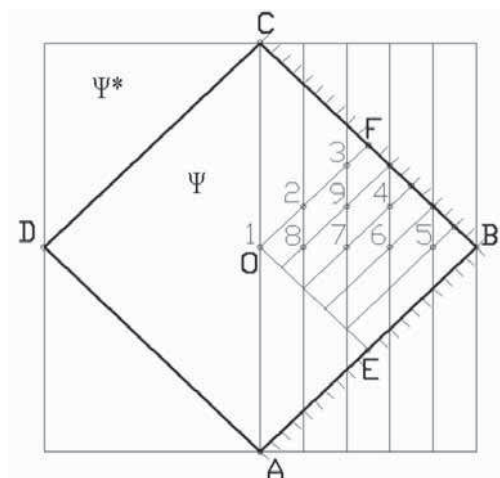


Рис. 2. Схемы введения линий МП



Результаты решения представлены в табл. 1.

Таблица 1

Номера точек (рис. 2)	Уравнение равновесия $\nabla^4 w = 1$, число прямых $s = 5$	
	Многоточечный вариант МП	Обычный вариант МП
	Коэффициенты прогиба \bar{w} в формуле $w = \bar{w} \cdot \frac{qa^4}{D}$	
1	$1,30 \cdot 10^{-3}$	$1,25 \cdot 10^{-3}$
2	$9,57 \cdot 10^{-4}$	$9,17 \cdot 10^{-4}$
3	$2,05 \cdot 10^{-4}$	$1,90 \cdot 10^{-4}$
4	$1,40 \cdot 10^{-4}$	$1,42 \cdot 10^{-4}$
5	$3,56 \cdot 10^{-5}$	$3,09 \cdot 10^{-5}$
6	$2,63 \cdot 10^{-4}$	$2,59 \cdot 10^{-4}$
7	$7,04 \cdot 10^{-4}$	$6,76 \cdot 10^{-4}$
8	$1,13 \cdot 10^{-3}$	$1,08 \cdot 10^{-3}$
9	$5,44 \cdot 10^{-4}$	$5,20 \cdot 10^{-4}$
	Коэффициенты изгибающего момента \bar{m} в формуле $M = \bar{m} \cdot qa^2$	
1	$2,32 \cdot 10^{-2}$	$2,26 \cdot 10^{-2}$

Значения коэффициентов для функции прогиба и изгибающего момента в центральной точке пластинки согласно [9] равны: $\bar{w} = 1,26 \cdot 10^{-3}$, $\bar{m} = 2,31 \cdot 10^{-2}$.

В табл. 2 приведены результаты расчета ортотропной ромбовидной пластинки (рис. 3), зашечленной по контуру и находящейся под действием распределенной нагрузки.

Размеры пластинки — $AB = DC = 10$ см, $\theta = 30$ град, $h = 0,1$ см. Параметры материала — $E_1 = 3,05 \cdot 10^5$ кг/см², $E_2 = 1,88 \cdot 10^5$ кг/см², $\mu_1 = 0,194$, $\mu_2 = 0,12$. Нагрузка $q = \text{const} = 1$ кг/см².

При решении задачи применялась дискретная ортогонализация векторов-решений, а вектор начальных условий определялся из уравнения (12).

В общем случае при численном решении МТКЗ оценить точность полученного решения

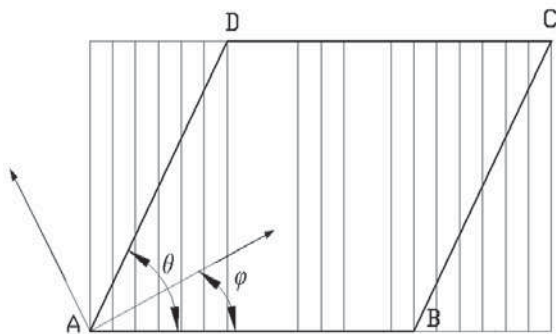


Рис. 3. Геометрия пластинки и схема введения линий

Таблица 2

Угол поворота осей ортотропии φ , град.		Число прямых $s=25$
		Прогиб в центре пластинки, см
0		$6,93 \cdot 10^{-2}$
30		$4,61 \cdot 10^{-2}$
90		$5,02 \cdot 10^{-2}$
Изотропная пластинка $E = 2,1 \cdot 10^6$ кг/см ² , $\mu = 0,3$	Метод прямых	$5,76 \cdot 10^{-3}$
	Метод конечных элементов	$5,55 \cdot 10^{-3} \div 5,74 \cdot 10^{-3}$

затруднительно. При практических расчетах оценка точности (устойчивости) численного интегрирования проводилась по наибольшей погрешности удовлетворения краевых условий и/или по совпадению значений в симметричных точках интервала интегрирования, если таковые имеются. При решении различных МТКЗ при прочих равных условиях более устойчивым оказался вариант с использованием аппроксимаций Паде.

Так, например, при тестовых расчетах длиной жестко зашечленной по контуру прямоугольной пластинки (соотношение сторон 1:15, линии МП вводились вдоль длинной стороны пластинки) при применении формулы (18) значения функции прогибов и ее производных в симметричных точках совпали с точностью до 8-10 значущих цифр. При этом нулевые граничные условия удовлетворялись с точностью от 10^{-17} в начале интервала интегрирования и до 10^{-11} в конце интервала при максимальном значении функции прогибов порядка 10^{-2} .

В заключение отметим, что разработанные алгоритмы решения многоточечных краевых задач показали хорошую точность и устойчивость при практических расчетах в случае плохообусловленных систем дифференциальных уравнений и/или больших интервалов интегрирования.

Литература

1. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // УМН, 1961. — Т.16. — № 3. — С. 171–174.
2. Быков А.А., Ильинский А.С. Решение краевых задач для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений методом направленной ортогонализации. // ЖВММФ, 1979. — Т. 19. — № 3. — С. 631–639.
3. Корбач В.Г. Алгоритм численного решения многоточечных краевых задач механики деформированного твердого тела. Прочность конструкций летательных аппаратов: Сб. науч. тр. / Редкол.: Львов М.П. и др. — Харьков: Харьк. авиац. ин-т, 1990. — С. 88–95.



4. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. — М., 1980. — 367 с.
5. *Бейкер Дж., Грейс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. — М.: Мир, 1986. — 502 с.
6. *Иванов В. В.* Методы вычислений на ЭВМ: Справочное пособие. — Киев. Изд-во "Наукова думка", 1986. — 584 с.
7. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек. — М.: Наука, 1974 — 448 с.
8. *Корбач В.Г.* Расчет дифференциально-разностным методом пластин и оболочек со смешанными граничными условиями. — Самолетостроение. Техника воздушного флота, вып. 48. Респ. научн.-техн. сборник. — Харьков: Вища школа, 1981. — С. 89–95.
9. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластины и оболочки, М., Наука, 1966. — 636 с.