

УДК 519.6 (045)

Климова А.С.

Державна акціонерна холдингова компанія "Артем". Україна, Київ

МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ СКЛАДНИХ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

Анотація

Наведено проблеми оптимізації складних технічних систем, розглянуто основні моделі та методи оптимізації, приведено нелокальний підхід до рішення задачі багатокритеріальної оптимізації.

Abstract

The various approaches of vector optimization problem decision are considered. The analysis of opportunities and application experience of various models and mathematical methods of the optimization problems decision are given. And unlocal approach to the problem of optimization was applied.

Вступ

Сучасна наука досліджує складні об'єкти і процеси, застосовуючи при цьому системний підхід [5]. У рамках цього підходу системний аналіз розуміється як вивчення, оцінка і класифікація даних про досліджувану складну систему, її компонентів і умов функціонування.

Ціль системного аналізу — підготовка передумов для створення системи з потрібними нам властивостями (системний синтез). Головною операцією при цьому є прийняття рішень, тобто деякий формалізований чи неформалізований вибір, здійснюваний людиною чи технічним пристроєм на основі даних системного аналізу. Так як складна система, як правило, характеризується суперечливими властивостями [1, 4], то й оптимізація складних систем виконується як багатокритеріальна (векторна). Робочим інструментом при системному аналізі складної системи є її модель, тобто формальний опис тих властивостей системи, які є істотними для цілей дослідження при заданих умовах функціонування. При моделюванні, завжди зв'язаному зі спрощенням, важливо уникнути порушення цілісності системи.

Дослідження будь-якого об'єкта містить у собі дві взаємозалежні і взаємообумовлені частини: *аналіз і синтез*. Визначена аналітична робота є обов'язковою передумовою для усіх видів класифікації і синтезу, без неї жодне дослідження не буде мати належної повноти. З іншого боку, не слід забувати, що розбирати явища на складові частини (аналіз) можна з єдиною метою — довідатися, як їх потім зібрати разом (синтез), по

можливості удосконаливши (оптимізація). В загальному вигляді змістовна сутність багатьох практичних задач у різних предметних областях складається у виборі умов, що дозволяють об'єкту дослідження виявити свої найкращі властивості (задачі оптимізації).

Умови, від яких залежать властивості об'єкта, кількісно виражаються деякими змінними величинами x_1, x_2, \dots, x_n , заданими в області визначення X і називаються аргументами оптимізації. У свою чергу, кожне з властивостей об'єкта кількісно описується за допомогою перемінної y , значення якої характеризує якість об'єкта стосовно цієї властивості.

У загальному випадку показники y_1, y_2, \dots, y_m називаються критеріями якості, і утворюють вектор $y = \{y_k\}_{k=1}^m$. Його компоненти кількісно виражають властивості об'єкта при заданій сукупності аргументів оптимізації $x = \{x_i\}_{i=1}^n \in X$.

Цільова функція $y = f(x)$ зв'язує критерії якості з аргументами оптимізації [1]. З деякими застереженнями задача оптимізації формулюється як знаходження такого сполучення аргументів з області їхнього визначення, при якому цільова функція набуває екстремальне значення.

Для задач оптимізації фундаментальними є поняття математичної моделі об'єкта і ті дані, якими дослідник оперує для побудови моделі. Спектр широкий — від повного знання до повної невизначеності. Між цими інформаційними полюсами знаходиться імовірнісний рівень невизначеності.

Нааявність достатньої інформації про механізми фізичних, хімічних, інформаційних, економічних і інших процесів, що відбуваються в об'єкті, дозволяє скласти детерміновану модель у вигляді диференціальних, алгебраїчних і інших рівнянь. Аналітичне дослідження щодо простих детермінованих математичних моделей є предметом класичної теорії оптимізації.

При невідомому ж механізмі процесів, що протікають в об'єкті, для складання математичної моделі й оптимізації застосовуються експериментальні чи експериментально-статистичні методи.

Аналіз досліджень та публікацій

Аналіз показує [1], що в міру ускладнення задач можливості їх чисто аналітичного рішення різко звужуються. Вирішити сучасну складну



задачу оптимізації, навіть при наявності докладного математичного опису, можна тільки чисельним методом. Тому, як це не парадоксально, але і при повному знанні механізмів, і при повній відсутності даних про них, не можна обійтися без експериментальних процедур. Тільки у першому випадку це буде обчислювальний експеримент із застосуванням імітаційного моделювання, а у другому організації серії натурних експериментів безпосередньо на об'єкті. Як при обчислювальному експерименті, так і при оптимізації на об'єкті в процесі пошуку екстремуму необхідно виконати деяку кількість обчислень (чи експериментальних визначень) цільової функції. В оптимальному проектуванні, особливо багатокритеріальному, цільові функції розраховуються по складних алгоритмах, що вимагає великих обчислювальних ресурсів і витрат машинного часу. А при натурних дослідженнях на об'єкті, проведення кожного дослідження може супроводжуватися значними витратами матеріальних, тимчасових і інших ресурсів. Крім того, звичайною практикою при експериментуванні є робота персоналу й устаткування в умовах, близьких до гранично припустимих. Усе це свідчить про крайню необхідність розробки таких ефективних процедур оптимізації, які б дозволяли одержувати необхідні наукові результати при мінімальній кількості натурних чи обчислювальних експериментів.

Таким чином, якщо трудомісткість визначення цільової функції велика, то зниження необхідної кількості таких визначень стає домінуючим критерієм ефективності при конструюванні алгоритму оптимізації. Варто віддавати перевагу алгоритмам, на кожному кроці яких береться і використовується максимально можлива кількість інформації про цільову функцію. Платою за це стає деяке ускладнення алгоритму і програми.

В даний час в обчислювальній математиці переважно використовуються різні версії градієнтних методів [2]. Суть цих методів полягає в заміні складної задачі оптимізації послідовністю простих локальних задач, що не вимагають апріорних даних про характер цільової функції. Спочатку в невеликій області деякої початкової точки простору аргументів ставиться серія експериментів.

Отримані дані використовуються для представлення локальної моделі цільової функції в околицях стартової точки поліномом першого ступеня. Організується рух з деяким кроком по поверхні цільової функції в напрямку градієнта лінійного наближення до досягнення умовного екстремуму. В отриманій точці робиться нове лінійне наближення і так продовжується доти, поки поточна точка не попадає в ту малу область простору аргументів, де знаходиться шуканий екстремум.

Градієнтні методи спираються на локальні (в околицях поточної точки) моделі цільової функції і тому недостатньо ефективні. Застосування локальних властивостей змушує часто змінювати напрямки пошуку, що і приводить у підсумку до неефективної обчислювальної процедури [2]. Для більшості градієнтних методів характерна необхідність евристичного завдання початкової точки і кроку пошуку, що вносить у процедуру оптимізації елементи суб'єктивності й істотно впливає на ефективність.

Нелокальний підхід передбачає апроксимацію цільової функції деякою моделлю не в околицях якоїсь точки, а у всій області визначення. Чим краще нелокальна модель описує цільову функцію, тим ближче розрахунковий екстремум до істинного. Але у відомих модифікаціях нелокальні апроксимаційні методи великої практичної значимості не мають, тому що критерії якості алгоритмів оптимізації й апроксимації істотно розрізняються [3].

Дійсно, у задачі апроксимації наближення повинне бути рівномірно "гарним" на всій заданій множині аргументів, а в задачі оптимізації — тільки в околицях точки шуканого екстремуму. Доцільно врахувати особливості розглянутих напрямків і розробити ефективний метод оптимізації, вільний від зазначених недоліків.

Постановка завдання

Нехай задана деяка компактна підмножина X (множина аргументів оптимізації) кінематичного евклідового простору E^n , де $n \geq 1$, що складається з елементів $x = \{x_i\}_{i=1}^n$, на якому визначена обмежена знизу цільова функція $f(x)$, що належить деякому класу функцій: $f(x) \in \Phi$. Потрібно, використовуючи кінцеве число обчислень функції $f(x)$, оцінити величину

$$f^*(x) = f(x^*) = \inf_{x \in X} f(x) \quad (1)$$

і знайти точку $x^* \in X$, у якій ця оцінка реалізується. Серед задач оптимізації є такі, про які заздалегідь відомо, що

$$\inf_{x \in X} f(x) = \min_{x \in X} f(x)$$

тобто в області визначення X є єдиний мінімум функції $f(x)$. Якщо, користуючись цією інформацією, визначити Φ як клас неперервних в області екстремуму однокстремальних на X функцій $f(x)$, а також акцентувати увагу на ефективності обчислювального процесу, то задача (1) може бути сформульована так: використовуючи чим найменше число обчислень функції $f(x)$, знайти

$$x^* = \arg \min_{x \in X} f(x) \quad (2)$$

З огляду на те, що визначення x^* може бути виконано лише приблизно, мова йде про відшукування якої-небудь точки з множини

$$X_\varepsilon = \{x \in X : \rho(x, x^*) \leq \varepsilon\}, X_\varepsilon \subset X,$$

де ρ – деяка метрика на X ; ε – припустима похибка по аргументу. Задача максимізації виходить з (1) чи (2) заміною f на $-f$.

Нелокальний підхід оптимізації

Звернемося до потенційно більш ефективного нелокального підходу і постараємося звільнитися від властивих йому недоліків. Апроксимуємо функцію $f(x)$ на множині аргументів X деякою наближеною функцією $F(x, a)$, відомою з точністю до вектора констант (коефіцієнтів $a \{a_j\}_{j=1}^m$). Вигляд функції $F(x, a)$ визначається тією інформацією, якою володіє дослідник про механізми процесів чи явищ в об'єкті який оптимізується. Такі дані можуть значно поліпшити якість апроксимації. В ідеалі функція $F(x, a)$ настільки добре описує цільову функцію $f(x)$, що їх екстремуми збігаються. На практиці так не буває, тому вирішити задачу оптимізації "за один раз", як правило, не можна. Але необхідно мати на увазі, що при виборі $F(x, a)$ функція повинна бути досить простою, щоб процеси апроксимації й обчислення оцінок аргументів мінімуму не виявилися надмірно громіздким. З іншого боку, апроксимуюча залежність повинна володіти достатніми прогностичними властивостями, щоб швидкість збіжності обчислювального процесу була задовільною. У більшості практичних випадків ці вимоги виконуються в класі апроксимуючих поліномів другого порядку:

$$F(x, a) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{j=1}^n a_j x_j^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad (3)$$

де a_0, a_i, a_j, a_{ij} – коефіцієнти.

Для спрощення обчислювальних процедур можливі різні усікання функції (3). У той же час не виключено, що дуже складні цільові функції можуть бути визначені з застосуванням набагато більших апроксимаційних залежностей.

Побудова наближених функцій може бути виконана як методами інтерполяції, так і апроксимацією по методу найменших квадратів. Чому ж обрано спосіб апроксимації? Інтерполяційні формули передбачають точний збіг наближеної і цільової функцій в опорних точках (вузлах інтерполяції), кількість яких, як і кількість невідомих констант a , дорівнює m . Коефіцієнти a визначаються рішенням визначеної системи рівнянь

$$F(x^{(k)}, a) = f(x^{(k)}) \quad k \in [1, m],$$

де $x^{(k)}$ – вузли інтерполяції.

Метод найменших квадратів передбачає N опорних точок (вузлів апроксимації), причому число N може бути більшим, меншим чи дорівнювати кількості констант m . Невідомі коефіцієнти наближеної функції визначаються з умови

$$E(a) = \sum_{u=1}^N [f(x^{(u)}) - F(x^{(u)}, a)]^2 = \min_a$$

Використовуючи необхідну умову мінімуму функції, одержуємо систему нормальних рівнянь

$$\partial E(a) / \partial a_j = 0, \quad j \in [1, m]$$

рішення якої дає невідомі коефіцієнти апроксимуючої функції.

Таким чином, метод найменших квадратів може розглядатися як більш універсальний, у деякому розумінні, спосіб рішення який пропонує додаткові можливості для підвищення ефективності обчислювального процесу, чим метод інтерполяції, хоча метод інтерполяції має перевагу простоти.

Пропонується декомпозиція складної задачі оптимізації ітераційною послідовністю більш простих нелокальних задач, причому кожна наступна обчислюється в меншій області визначення аргументів, чим попередня. Зменшується протиріччя між критеріями якості алгоритмів апроксимації й оптимізації і використовуються переваги нелокального підходу.

До нелокальної моделі $F(x, a)$ пред'являються вимоги унімодалності у відкритій області аргументів $x \in E^n$ і диференційованості по цих аргументах.

Апроксимаційній моделі $F(x, a)$ надається властивість адаптації за рахунок вибору коефіцієнтів a на кожній ітерації в області визначення аргументів меншої чим на попередній ітерації. Основна ідея побудови алгоритму полягає в наступному.

На першій ітерації здійснюється апроксимація функції $f(x)$ нелокальною моделлю $F(x, a)$ на усій заданій множині аргументів X . У цій області виконаємо N обчислень функції $f(x)$ у різних точках (вузлах апроксимації), що складають систему базисних точок $S^{(0)}$. По отриманим даним обчислено заданий набір коефіцієнтів $a^{(0)}$ що дозволяє перейти від моделі $F(x, a)$ до вираження $F(x)$. Далі, спираючись на вимогу унімодалності наближеної моделі, у відкритій області, скористаємося необхідною умовою мінімуму функції

$$\partial F^{(0)}(x) / \partial x_i = 0, \quad i \in [1, n] \quad (4)$$

і знайдемо першу оцінку $x^{(1)}$ шуканої сукупності аргументів як рішення системи рівнянь (4). Дискретна система $S^{(0)}$ базисних точок є гомеоморфним відображенням заданої неперервної області X . Отримана нова точка $x^{(1)}$ вводиться в



систему базисних точок замість відкинутої старої (звичайно в ній $f(x)$ максимальна). Далі розрахунок повторюється для отриманої в такий спосіб нової системи базисних точок $S^{(l)}$. По властивості гомеоморфізму

$$X^{(i+1)} < X^{(i)}, \quad i = I, II, \dots \quad (5)$$

у тому розумінні, що гіперобсяг, зайнятий компактною підмножиною $X^{(i+1)}$ в просторі E^n , менше, ніж гіперобсяг, що відповідає підмножині X^i (зазначені підмножини не обов'язково вкладені). Так як в меншій області функція $F(x, a)$ точніше описує функцію $f(x)$, то вираженню (5) відповідає послідовність нелокальних моделей з уточнюючими коефіцієнтами $a^{(0)}, a^{(l)}, a^{(II)}, \dots$

Звідси, згідно (4), впливає послідовність $x^{(l)}, x^{(II)}, x^{(III)}, \dots$ оцінок, які у принципі, сходяться до точки x^* істинного мінімуму функції $f(x)$.

По суті, метод заснований на ітераційній побудові "пливучої" разом із системою базисних точок $S^{(l)}$, яка уточнюється за результатами експерименту нелокальної $F(x, a^{(l)})$ моделі, причому сукупність опорних точок стискається і стягується до точки шуканого екстремуму.

Таким чином, на кожній ітерації одночасно і взаємозалежно здійснюється, як уточнення наших представлень про цільову функцію в області екстремуму, так і визначення такої оцінки аргументів екстремуму, яка адекватна рівню цих представлень на даній ітерації.

Висновки

Ефективність викладеного підходу в порівнянні, наприклад, із градієнтними методами роз'яс-

нюється властивостями ітераційного уточнення нелокальних апроксимаційних моделей цільової функції в міру стиску областей аргументів, що стягаються до шуканої точки екстремуму. Тим самим знімається протиріччя між критеріями якості алгоритмів оптимізації й апроксимації.

Характерною відмінністю запропонованого методу є те, що він не вимагає суб'єктивного завдання ні початкової точки пошуку, ні яких би то не було пошукових кроків. Утім, це не виключає можливості включити до складу заданої системи базисних точок $S^{(0)}$ тієї точки, яка по тим чи іншим розумінням здається перспективною. Це характерно для дуальних методів, де процес визначення шуканої оцінки збігається з процесом вивчення цільової функції. Запропонований метод може в багатьох випадках виявитися кращим і, у всякому разі, розширити можливості дослідника при рішенні задач оптимізації складних систем.

Література

1. *Воронин А.* Многокритериальный синтез динамических систем. — Киев: Наукова думка, 1992. — 160 с.
2. *Банди Б.* Методы оптимизации. — М.: Радио и связь, 1988. — 128 с.
3. *Жиглявский А., Жилинскас А.* Методы поиска глобального экстремума. — М.: Наука, 1991. — 248 с.
4. *Воронин А., Зиатдинов Ю., Харченко А.* Сложные технические и эргатические системы: методы исследования. — Харьков: Факт, 1997. — 240 с.
5. *Губанов В., Захаров В., Коваленко А.* Введение в системный анализ. — Ленинград: Изд-во Лен. ун-та, 1988. — 232 с.