

УДК 624.073

Ставиченко В.Г.

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "ХАИ". Украина, Харьков

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСТАТОЧНОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПАНЕЛЕЙ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ МАЛОЙ КРИВИЗНЫ

Анотація

Розглянуті питання визначення залишкового напружено-деформованого стану панелей з композиційних матеріалів після виготовлення та установки в конструкцію. Отримано рівняння технологічного вигину панелей малої кривизни із застосуванням розрахункової схеми ортотропних пологих оболонок та їх аналітичний розв'язок. Проведено дослідження залишкового напружено-деформованого стану панелей.

Abstract

The problem of definition of residual stress-strain state of composite laminated panels after manufacture and installation at the construction is considered. The equations of technological bending of panels with low curvature with usage of orthotropic flat shells theory and the analytical solution of them are obtained. The investigation of residual stress-strain state of panel is carried out.

Введение

Известно, что напряженно-деформированное состояние (НДС) агрегатов летательных аппаратов (ЛА) из композиционных материалов (КМ) определяется не только нагрузками, действующими при эксплуатации, но также процессом их изготовления и установки в конструкцию. При формировании изделий из КМ в них возникают поля остаточных напряжений и деформаций [1], обусловленные в первую очередь использованием повышенных температур и неоднородностью структуры материала. При сборке конструкции, происходит стеснение свободных технологических деформаций ее элементов, что приводит к возникновению в них монтажных напряжений.

В практике изготовления тонкостенных элементов авиационных конструкций типа панелей обшивки нередко наблюдается их коробление (изгиб), вызванное несимметричным относительно срединной поверхности панели полем остаточных технологических напряжений. На характер распределения остаточных напряжений влияют структура панели и характеристики технологического процесса ее изготовления, в частности распределение температуры по ее толщине [1].

Поскольку на панели обшивки накладываются жесткие требования к сохранению аэродинамического профиля поверхности, при проектировании таких элементов конструкции необходимо обеспечить допустимое отклонение их формы от теоретического контура. Это достигается путем разумного управления конструктивными параметрами панели и технологического процесса ее изготовления, причем наилучших результатов следует ожидать при комплексном рассмотрении этих вопросов [2].

Очевидно, что для достижения поставленных целей необходимо наличие математической модели, позволяющей прогнозировать остаточное НДС панелей после изготовления и установки в конструкцию, а также изучение основных закономерностей их остаточного деформирования.

Математическая модель НДС плоских панелей находящихся в условиях действия поперечной нагрузки, температурного поля и технологического натяжения слоев, предложена в [2]. При ее построении использовалась линейная теория тонких пластин. Упрощенная методика определения прогибов пластин, находящихся в однородном по поверхности температурном поле с использованием вариационных методов предложена в [3].

В представленной статье разработана математическая модель НДС панелей с использованием теории пологих оболочек, которая применима к панелям с небольшой кривизной типа обшивки крыла ЛА.

Математическая модель

Для определения остаточного НДС панели используется геометрически линейная теория тонких пологих оболочек. Поскольку структура панели в общем случае предполагается несимметричной относительно срединной поверхности, теряется смысл последней, поэтому выбор начальной поверхности [4] (поверхность начала отсчета координаты z) может быть произвольным (рис. 1). В рассматриваемом случае удобно в качестве начальной поверхности выбрать нижнюю поверхность панели.

Рассмотрим состояние панели, имеющее место при стеснении ее изгиба. В этом состоянии в ней действуют остаточные технологические напряжения $\sigma_x^T, \sigma_y^T, \tau_{xy}^T$, поле которых является самоуравновешенным.

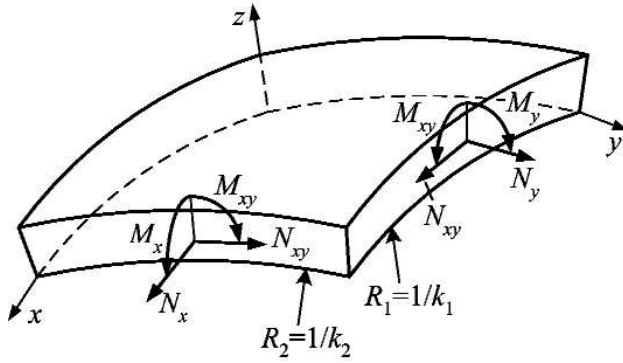


Рис. 1. Элемент пологой оболочки

Считая деформации панели в исходном состоянии нулевыми, учет остаточных напряжений осуществляется путем введения дополнительных членов в обобщенный закон Гука на основании гипотезы Дюамеля-Неймана, а именно:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= A_{11}\varepsilon_x + A_{12}\sigma_y + A_{13}\tau_{xy} + \sigma_x^T; \\ \sigma_y &= A_{12}\varepsilon_x + A_{22}\sigma_y + A_{23}\tau_{xy} + \sigma_y^T; \\ \tau_{xy} &= A_{13}\varepsilon_x + A_{23}\sigma_y + A_{33}\tau_{xy} + \tau_{xy}^T,\end{aligned}\quad (1)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ — напряжения и деформации; A_{ij} — коэффициенты жесткости материала [4];

При отсутствии внешней нагрузки, равновесие элемента оболочки описывается тремя однородными уравнениями:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \\ - k_1 N_x - k_2 N_y = 0.\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь $N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}$ — усилия и моменты, определяемые формулами:

$$\begin{aligned}N_x &= \int_0^h \sigma_x dz; \quad N_y = \int_0^h \sigma_y dz; \\ N_{xy} &= \int_0^h \tau_{xy} dz; \quad M_x = \int_0^h \sigma_x z dz; \\ M_y &= \int_0^h \sigma_y z dz; \quad M_{xy} = \int_0^h \tau_{xy} z dz.\end{aligned}\quad (3)$$

k_1, k_2 — кривизны оболочки; h — толщина оболочки.

При расчете пологих оболочек кривизны k_1, k_2 , как правило, принимаются постоянными и равными кривизмам в ее вершине [5].

Согласно гипотезе недеформируемых нормалей, распределение деформаций по толщине оболочки подчиняется линейному закону:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + \kappa_x z; \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y^0 + \kappa_y z; \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + \chi_{xy} z;\end{aligned}\quad (4)$$

где $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$ и $\kappa_x, \kappa_y, \chi_{xy}$ — деформации и кривизны начальной поверхности (обобщенных деформации).

При предположении о малости прогиба, обобщенные деформации допустимо связывать с перемещениями линейными соотношениями Коши:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + k_1 w; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + k_2 w; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \chi_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},\end{aligned}\quad (5)$$

где u, v, w — перемещения начальной поверхности в направлении осей координат x, y, z соответственно.

Для записи уравнений равновесия (2) через перемещения начальной поверхности, необходимо получить физические соотношения, связывающие усилия и моменты с обобщенными деформациями. Подставляя соотношения (1) в выражения (4) учитывая при этом самоуравновешенность поля остаточных напряжений, а также предполагая оболочку ортотропной, получим:

$$\begin{aligned}N_x &= B_{11}\varepsilon_x + B_{12}\varepsilon_y + C_{11}\kappa_x + C_{12}\kappa_y; \\ N_y &= B_{12}\varepsilon_x + B_{22}\varepsilon_y + C_{12}\kappa_x + C_{22}\kappa_y; \\ N_{xy} &= B_{33}\gamma_{xy} + C_{33}\chi_{xy}; \\ M_x &= C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y + D_{11}\kappa_x + D_{12}\kappa_y + M_x^T; \\ M_y &= C_{12}\varepsilon_x + C_{22}\varepsilon_y + D_{12}\kappa_x + D_{22}\kappa_y + M_y^T; \\ M_{xy} &= C_{33}\gamma_{xy} + D_{33}\chi_{xy};\end{aligned}\quad (6)$$

где B_{ij}, C_{ij}, D_{ij} — мембранные, смешанные и изгибные жесткости оболочки [4]; M_x^T, M_y^T — моменты от остаточных напряжений.

Подставляя соотношения (6) в уравнения равновесия (2) с учетом соотношений (5), получаем систему трех дифференциальных уравнений в частных производных относительно перемещений начальной поверхности:

$$\begin{aligned}L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w = 0; \\ L_{12}u + L_{22}v + L_{23}w = 0; \\ L_{13}u + L_{23}v + L_{33}w = \frac{\partial^2 M_x^T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y^T}{\partial y^2},\end{aligned}\quad (7)$$

где

$$L_{11} = B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_{33} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad L_{12} = \bar{B} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y};$$

$$L_{22} = B_{22} \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + B_{33} \frac{\partial^2}{\partial^2 x}; L_{13} = B_{k1} \frac{\partial}{\partial x} - C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^3} - \bar{C} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y^2};$$

$$L_{23} = B_{k2} \frac{\partial}{\partial y} - C_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3} - \bar{C} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y};$$

$$L_{33} = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\bar{D} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} +$$

$$D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} - 2C_{k1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2C_{k2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} +$$

$$+(k_1 B_{k1} + k_2 B_{k2});$$

$$\bar{B} = B_{12} + B_{33}; \bar{C} = C_{12} + 2C_{33};$$

$$\bar{D} = D_{12} + 2D_{33};$$

$$B_{k1} = k_1 B_{11} + k_2 B_{12}; B_{k2} = k_1 B_{12} + k_2 B_{22};$$

$$C_{k1} = k_1 C_{11} + k_2 C_{12}; C_{k2} = k_1 C_{12} + k_2 C_{22}.$$

Полученную систему следует интегрировать при граничных условиях соответствующих способу закрепления панели в конструкции.

Рассмотрим прямоугольную в плане оболочку, шарнирно опертую по всем сторонам. Начало координат расположим в углу оболочки, а размеры ее продольных (параллельных оси x) и поперечных сторон примем равными соответственно a и b . Граничные условия для такой оболочки имеют вид:

$$\begin{aligned} & \text{при } x = 0; \quad x = a: \\ & w = 0; \quad v = 0; \quad M_x = 0; \quad N_x = 0; \\ & \text{при } y = 0; \quad y = b: \\ & w = 0; \quad u = 0; \quad M_y = 0; \quad N_y = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Наиболее простое решение поставленной задачи можно получить, представляя перемещения начальной поверхности оболочки и моменты от остаточных напряжений в виде следующих рядов:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn} \cos \lambda_m x \sin \lambda_n y; \\ v &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn} \sin \lambda_m x \cos \lambda_n y; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} w &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y; \\ M_x^T &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y; \\ M_y^T &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y, \end{aligned} \quad (10)$$

где u_{mn}, v_{mn}, w_{mn} — коэффициенты, подлежащие определению;

$$\lambda_m = \pi m/a; \quad \lambda_n = \pi n/b$$

$$p_{mn} = \begin{cases} 16M_x^T, & \text{при } m, n = 1, 3, 5 \dots; \\ 0, & \text{при } m, n = 2, 4, 6 \dots \end{cases}$$

$$q_{mn} = \begin{cases} 16M_y^T, & \text{при } m, n = 1, 3, 5 \dots; \\ 0, & \text{при } m, n = 2, 4, 6 \dots \end{cases}$$

С учетом разложений (10), ряды (9) удовлетворяют граничным условиям (8).

Поступая обычным образом, подставим ряды (9), (10) в уравнения (7) и получим систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов u_{mn}, v_{mn}, w_{mn} :

$$\begin{aligned} a_{11}^{mn} u_{mn} + a_{12}^{mn} v_{mn} + a_{13}^{mn} w_{mn} &= 0; \\ a_{12}^{mn} u_{mn} + a_{22}^{mn} v_{mn} + a_{23}^{mn} w_{mn} &= 0; \\ a_{13}^{mn} u_{mn} + a_{23}^{mn} v_{mn} + a_{33}^{mn} w_{mn} &= -p_{mn} \lambda_m^2 - q_{mn} \lambda_n^2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_{11}^{mn} &= B_{11} \lambda_m^2 + B_{33} \lambda_n^2; \quad a_{12}^{mn} = \bar{B} \lambda_m \lambda_n; \\ a_{22}^{mn} &= B_{22} \lambda_m^2 + B_{33} \lambda_n^2; \\ a_{13}^{mn} &= -C_{11} \lambda_m^3 - \bar{C} \lambda_m \lambda_n^2 + B_{k1} \lambda_m; \\ a_{23}^{mn} &= -C_{22} \lambda_n^3 - \bar{C} \lambda_n \lambda_m^2 + B_{k2} \lambda_n; \\ a_{33}^{mn} &= D_{11} \lambda_m^4 + 2\bar{D} \lambda_m^2 \lambda_n^2 + D_{22} \lambda_n^4 - \\ & - C_{k1} \lambda_m^2 - C_{k2} \lambda_n^2 + k_1 B_{k1} + k_2 B_{k2}. \end{aligned}$$

Решение полученной системы можно записать в виде:

$$\begin{aligned} u_{mn} &= \frac{(a_{22}^{mn} a_{13}^{mn} - a_{12}^{mn} a_{23}^{mn})(p_{mn} \lambda_m^2 + q_{mn} \lambda_n^2)}{a_{mn}}; \\ v_{mn} &= \frac{(a_{11}^{mn} a_{23}^{mn} - a_{12}^{mn} a_{13}^{mn})(p_{mn} \lambda_m^2 + q_{mn} \lambda_n^2)}{a_{mn}}; \\ w_{mn} &= \frac{((a_{12}^{mn})^2 - a_{11}^{mn} a_{22}^{mn})(p_{mn} \lambda_m^2 + q_{mn} \lambda_n^2)}{a_{mn}}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_{mn} &= a_{11}^{mn} a_{22}^{mn} a_{33}^{mn} + 2a_{12}^{mn} a_{13}^{mn} a_{23}^{mn} - \\ & - a_{11} (a_{23}^{mn})^2 - a_{22} (a_{13}^{mn})^2 - a_{33} (a_{12}^{mn})^2. \end{aligned}$$

Подставляя ряды (9) в геометрические соотношения (5), получим выражения для деформаций и кривизн начальной поверхности оболочки:

$$\begin{aligned} \epsilon_x^0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (k_1 w_{mn} - \lambda_m u_{mn}) \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y; \\ \epsilon_y^0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (k_2 w_{mn} - \lambda_n v_{mn}) \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y; \\ \epsilon_x^0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_m u_{mn} + \lambda_n v_{mn}) \cos \lambda_m x \cos \lambda_n y; \\ \kappa_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m^2 w_{mn} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y; \\ \kappa_y &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 w_{mn} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y; \\ \kappa_x &= -2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m \lambda_n w_{mn} \cos \lambda_m x \cos \lambda_n y. \end{aligned}$$

Далее с использованием соотношений (4) и (1) определяются напряжения.

Следует отметить, что вследствие того, что остаточные моменты были разложены в ряды по синусам, полученное решение дает нулевые значения кривизны κ_x на краях $x = 0$ и $x = a$, а также нулевое значение кривизны κ_y на краях $y = 0$ и $y = b$. Тем не менее точные значения кривизн в упомянутых точках можно получить из физических соотношений (6) и граничных условий на соответствующих сторонах.

На сторонах $x = 0$ и $x = a$: $\varepsilon_y = 0$, а $\kappa_y = 0$ для определения величин ε_x^0 и κ_x имеем систему уравнений:

$$\begin{aligned} B_{11}\varepsilon_x^0 + C_{11}\kappa_x &= 0; \\ C_{11}\varepsilon_x^0 + D_{11}\kappa_x &= -M_x^T. \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\text{при } x = 0 \text{ и } x = a: \varepsilon_x^0 = -\frac{C_{11}M_x^T}{C_{11}^2 - B_{11}D_{11}}; \kappa_x = \frac{B_{11}M_x^T}{C_{11}^2 - B_{11}D_{11}}.$$

Из аналогичных соображений

$$\text{при } y = 0 \text{ и } y = b: \varepsilon_y^0 = -\frac{C_{22}M_y^T}{C_{22}^2 - B_{22}D_{22}}; \kappa_y = \frac{B_{22}M_y^T}{C_{22}^2 - B_{22}D_{22}}.$$

Известно, что одним из ограничений при проектировании панелей обшивки летательных аппаратов является ограничение на относительную волнистость контура, определяемую как отношение амплитуды прогиба к длине волны $\bar{w} = w_{\max} / t$ (рис. 2).

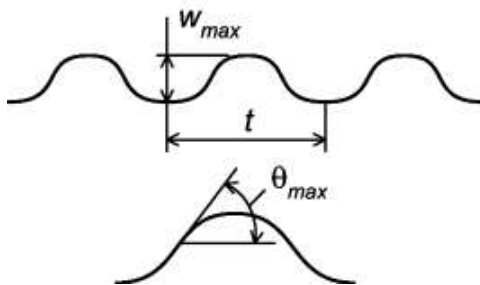


Рис. 2. К определению относительной волнистости

Но поскольку остаточный прогиб панелей может иметь сложную форму, понятие относительной волнистости теряет смысл. Поэтому в качестве безразмерной величины характеризующей степень остаточного деформирования панели в статье используется максимальное значение угла поворота сечения панели в предполагаемом направлении воздушного потока. При синусоидальном законе изменения прогиба, величина относительной волнистости пропорциональна максимальному значению угла поворота:

$$\bar{w} = \frac{\theta_{\max}}{\pi}.$$

Численные исследования

При проведении численных исследований рассмотрены панели с несимметричной укладкой, в которых на этапе охлаждения от температуры отверждения связующего до температуры окружающей среды возникли остаточные температурные напряжения. Эти напряжения вычисляются по известным зависимостям механики слоистых КМ [6].

В качестве примера, рассмотрены панели одинарной кривизны (рис. 3) со схемой укладки слоев [0,90,0,90,0,90]. Материал слоев имеет свойства типичные для однонаправленных углепластиков. Приращение температуры, полученное панелями при изготовлении, принимается равным -135 К.

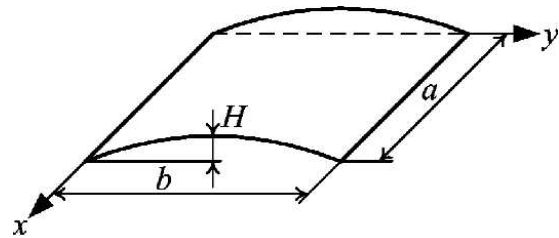


Рис. 3. Панель одинарной кривизны

Рис. 4 и рис. 5 иллюстрируют влияние кривизны на остаточное деформирование квадратных в плане панелей с размерами сторон $a = 200$ мм; $b = 200$ мм и $a = 200$ мм; $b = 100$ мм с разной высотой H (рис. 3). На представленных рисунках изображены линии уровня искривленной поверхности панелей, а также нанесены величины минимального и максимального значений прогиба. Размеры и величины максимальных и минимальных значений прогиба даны в миллиметрах.

Представленные рисунки показывают, что с изменением высоты оболочки H , а следовательно и кривизны k_2 , изменяется форма ее остаточного прогиба и происходит уменьшение его величины.

Практический интерес представляет изучение степени влияния кривизны панели на ее остаточное деформирование. Это позволит определить рамки применимости теории пластин к расчету панелей малой кривизны.

Для этого рассмотрены квадратные в плане оболочки с различными значениями относительной толщины h/a и относительной высоты H/a . Для каждой оболочки вычислялась величина

$$\delta\theta_{y\max} = \frac{\theta_{y\max} - \theta_{y\max}^0}{\theta_{y\max}} 100\%,$$

где $\theta_{y\max}$ — максимальное значение угла поворота сечения панели в направлении оси y полученное для панели с заданной относительной высотой и относительной толщиной;

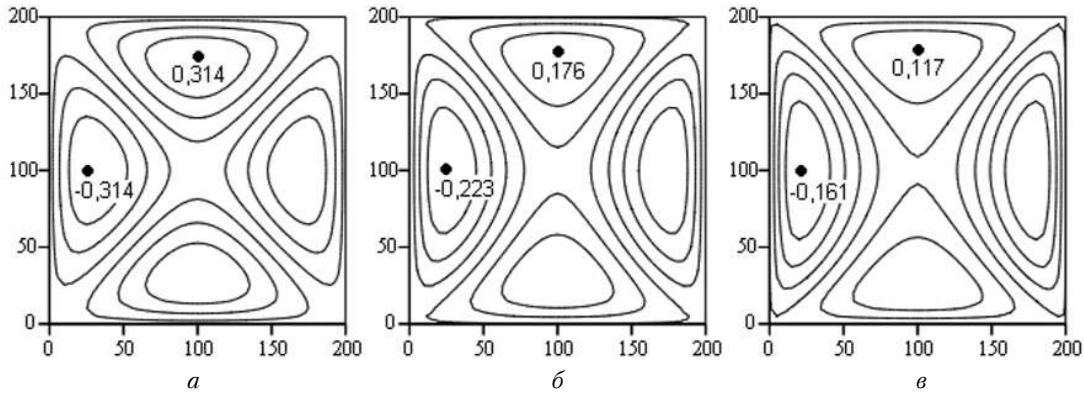


Рис. 4. Остаточный прогиб панелей одинарной кривизны с размерами сторон 200×200 мм: $a - Z = 0$; $б - Z = 1$ мм; $в - Z = 2$ мм

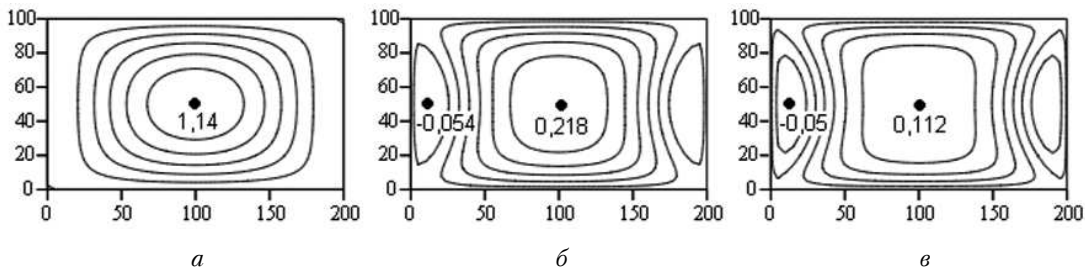


Рис. 5. Остаточный прогиб панелей одинарной кривизны с размерами сторон 200×100 мм: $a - Z = 0$; $б - Z = 0,5$ мм; $в - Z = 1$ мм

- максимальное значение угла поворота полученное для панели с заданной относительной толщиной, но нулевой относительной высотой Z/a , то есть для пластины.

По полученным результатам построены графические зависимости изображенные на рис. 6.

Как видно из рис. 6, степень влияния кривизны панели на остаточное деформирование уменьшается с увеличением ее относительной толщины. Таким образом, для расчета достаточно толстых пане-

лей может быть использована расчетная схема пластины. Этой возможности способствует также тот факт, что теория пологих оболочек дает меньшие значения остаточного прогиба, нежели теория пластин. Но для тонких панелей влияние кривизны существенно и для их расчета более адекватной является расчетная схема полой оболочкой.

Литература

1. Гузь А.Н., Томашевский В.Т., Шульга Н.А., Яковлев В.С. Технологические напряжения и деформации в композиционных материалах. К.: "Вища школа", 1988. — 270 с.
2. Молодцов Г.А., Биткин В.Е. и др. Формостабильные и интеллектуальные конструкции из композиционных материалов. — М.: Машиностроение, 2000. — 352 с.
3. Карпов Я.С., Ставищенко В.Г. Определение температурных прогибов закрепленных слоистых пластин //Авиационно-космическая техника и технология. Сб. науч. ст. ХАИ. №6, 2005.
4. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. — М.: Машиностроение, 1988. — 272 с.
5. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. — М. Наука, 1974. — 446 с.
6. Карпов Я.С. Механика КМ. Учебное пособие. — Харьков: Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "ХАИ", 2001. — 75 с.

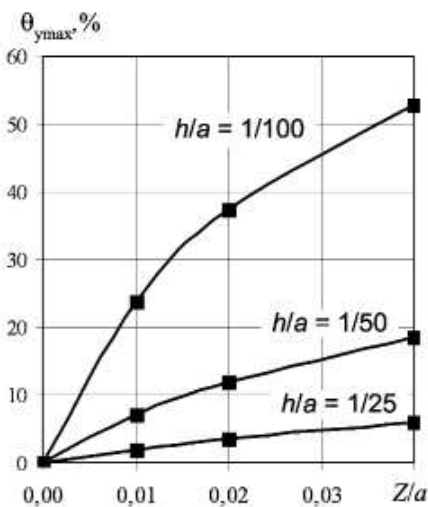


Рис. 6. Зависимость относительного изменения максимального угла поворота сечения панелей с различной относительной толщиной от их относительной высоты