

УДК 531.38: 504.3: 621.039

Бабак С.В.<sup>1</sup>, Чепур М.Л.<sup>2</sup>, Канченко В.Я.<sup>2</sup>, Карнаушенко Р.В.<sup>3</sup>, Мариношенко О.П.<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Державне підприємство «НТЦ новітніх технологій НАНУ». Україна, м. Київ

<sup>2</sup> Інститут проблем безпеки АЕС НАН України. Україна, м. Чорнобиль

<sup>3</sup> Національний технічний університет України «КПІ». Україна, м. Київ

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДЕФОРМУВАННЯ ФІЛЬТРОЕЖЕКЦІЙНОГО ПРИСТРОЮ ЯК НЕОДНОРІДНОЇ МЕХАНІЧНОЇ КОНСТРУКЦІЇ

### Анотація

### Abstract

Розглянуто фільтроежекційний пристрій (ФЕП), що є механічною конструкцією довільної внутрішньої структури, яка виконана з неоднорідного матеріалу. Виведено математичну модель деформування ФЕП.

Сформульовано рівняння статички та векторні рівняння руху елемента ФЕП. Отримана система скалярних взаємозв'язаних нелінійних рівнянь руху ФЕП, на основі яких можна досліджувати різні коливальні процеси в ФЕП, розв'язувати задачі статичної та динамічної стійкості. Ці рівняння можуть бути використані для проведення інженерних досліджень та для розв'язання конкретних задач щодо опису динамічної поведінки ФЕП при його експлуатації.

In this article the filtrational ejection device (FED) is considered, which is a mechanical construction with arbitrary internal structure, designed with inhomogeneous material. Mathematical model of FED deformation is determined.

Were formulated equalization of statics and vector equation of motion of FED element. Determined a system of scalar associate nonlinear equations of FED motion, on which basis it is possible to research swaying processes in FED and to solve tasks of static and motion firmness. These equalizations may be used in engineering researches and solving problem of describing the dynamic behavior of FED during its operation.

## Вступ

Для вирішення задач моніторингу об'єктів підвищеної небезпеки, таких як атомні електростанції, на даний час використовують вимірювання радіаційного фону та відбір шкідливих речовин поблизу джерел викиду. Вирішення таких задач здійснюється з використанням сучасних технологій та методик, серед яких – застосування безпілотних літальних апаратів (БПЛА).

Дослідження складу повітряного середовища поблизу джерел викиду може бути реалізоване за допомогою встановлення на БПЛА фільтроежекційного пристрою (ФЕП), який представляє собою видовжену механічну конструкцію з неоднорідного матеріалу та довільної внутрішньої структури.

В процесі експлуатації розташованого на БПЛА фільтроежекційного пристрою на нього діють інтенсивні навантаження, в тому числі і динамічні вібраційні навантаження від його взаємодії з набігаючим повітряним потоком. Це обумовлює необхідність проведення досліджень динамічних процесів деформування такого фільтроежекційного пристрою.

Динамічний аналіз зазначеного механічного об'єкту – ФЕП можна проводити на основі механіки неоднорідного твердого тіла, за допомогою аналітичних і числових методів. Модель поведінки розглядуваної конструкції, ідеалізація реальних властивостей матеріалу та типу зовнішніх навантажень, обумовлює вибір найбільш ефективного метода дослідження.

## Постановка задачі

Задачею даної роботи є виведення математичної моделі деформування фільтроежекційного пристрою, який представляє собою видовжену механічну конструкцію з неоднорідною внутрішньою структурою. Досліджувана механічна конструкція, в процесі експлуатації, знаходиться під дією зовнішніх динамічних навантажень.

### Опис механічної системи, її деформований та недеформований стани

В якості механічного об'єкта дослідження розглядається фільтроежекційний пристрій як видовжена механічна конструкція з неоднорідного матеріалу та довільної внутрішньої структури (див. рис. 1).

ФЕП будемо трактувати як просторове видовжене тіло, поперечний переріз якого в загальному випадку може бути лінійно-змінним по довжині. Цей переріз конструкції може бути не обов'язково суцільним чи пустотілим, а з довільним розподілом однорідних ізотропних матеріалів (мас) в середині. Вказані перерізи можуть мати вигляд багатозв'язних областей. Досліджувану механічну конструкцію інтерпретуємо як видовжену балку – стрижень з певним розподілом



Рис.1. Фільтроежекційний пристрій

маси по поперечному перерізу, зовнішній контур якого залишається незмінним в процесі деформування.

Розглядаємо два стани механічної конструкції: недеформований стан називаємо конфігурацією  $C_0$ , а деформований – конфігурацією  $C_t$ . Характеристики конструкції, що відносяться до її деформованого стану будемо позначати з верхнім індексом (\*).

Аналіз кінематичних та силових характеристик досліджуваної механічної конструкції в деформованому та недеформованому станах є передумовою для виведення адекватної математичної моделі її деформування, оскільки складові зовнішнього навантаження, тобто проекції головного вектора сил та головного моменту, безпосередньо залежать від ступеню деформування (величин прогинів та кутів закручування перерізів) досліджуваної конструкції. Для означення взаємозв'язку між конфігураціями  $C_0$  та  $C_t$  визначимо напрямні косинуси між локальними базисами в поперечних перерізах в недеформованому і деформованому станах ФЕП. Означимо вектори локального одиничного базису  $\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0$  системи відліку  $C_0, x_0, y_0, z_0$  – що належить поперечному перерізу конструкції в її деформованому стані. Далі обчислимо наступні величини

$$\frac{\partial \vec{R}^*}{\partial x}, \frac{\partial \vec{R}^*}{\partial y}, \frac{\partial \vec{R}^*}{\partial z}, \quad (1)$$

де  $\vec{R}^* = \vec{R} + \vec{U} = (U_1 + x)\vec{i} + (U_2 + y)\vec{j} + (U_3 + z)\vec{k}$  – радіус-вектор довільної точки в розглядуваному перерізі ФЕП в  $C_t$ ;  $\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  – радіус-вектор довільної точки в ФЕП в  $C_0$ ;  $\vec{U} = U_1\vec{i} + U_2\vec{j} + U_3\vec{k}$  – вектор переміщення довільної точки конструкції за рахунок її деформування.

Підставляючи в (1) вирази для апроксимацій компонентів вектора  $\vec{U}$ , які для опису загального випадку деформування [1] можуть бути представлені в наступному вигляді,

$$\begin{aligned} U_1 &= v_0(z, t) + c_1(z, t) + c_2(z, t)y, \\ U_2 &\approx w_0(z, t) + b_1(z, t) + b_2(z, t)y, \\ U_3 &\approx u_0(z, t) + a_1(z, t) + a_2(z, t)y, \end{aligned}$$

отримаємо:

$$\frac{\partial \vec{R}^*}{\partial z} = \left( \frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial c_1}{\partial z} x - \frac{\partial b_1}{\partial z} y \right) \vec{i} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \frac{\partial w_0}{\partial z} + \frac{\partial b_1}{\partial z} x + \frac{\partial b_2}{\partial z} y \right) \bar{j} + \\
 & + \left( \frac{\partial u_0}{\partial z} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} x - \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} y + 1 \right) \bar{k}; \\
 & \frac{\partial \bar{R}^*}{\partial x} = (1 + c_1) \bar{i} + b_1 \bar{j} - \frac{\partial v_0}{\partial z} \bar{k}; \\
 & \frac{\partial \bar{R}^*}{\partial y} = -b_1 \bar{i} + (1 + b_2) \bar{j} - \frac{\partial w_0}{\partial z} \bar{k}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Розділимо кожне з співвідношень (2) на  $\left[ \frac{\partial \bar{R}^*}{\partial x} \right]$ ,  $\left[ \frac{\partial \bar{R}^*}{\partial y} \right]$ ,  $\left[ \frac{\partial \bar{R}^*}{\partial z} \right]$ , покладаючи  $x = y = 0$  і нехтуючи складовими другого порядку малості, отримаємо:

$$\begin{aligned}
 \bar{k}_z^* & \approx \left. \frac{\partial \bar{R}^*}{\partial z} \right|_{x=0, y=0} = \frac{\partial v_0}{\partial z} \bar{i} + \frac{\partial w_0}{\partial z} \bar{j} + \left( \frac{\partial u_0}{\partial z} + 1 \right) \bar{k}, \\
 \bar{i}_z^* & \approx \left. \frac{\partial \bar{R}^*}{\partial x} \right|_{x=0, y=0} = (1 + c_1) \bar{i} + b_1 \bar{j} - \frac{\partial v_0}{\partial z} \bar{k}, \\
 \bar{j}_z^* & \approx \left. \frac{\partial \bar{R}^*}{\partial y} \right|_{x=0, y=0} = -b_1 \bar{i} + (1 + b_2) \bar{j} - \frac{\partial w_0}{\partial z} \bar{k}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

В результаті отримуємо таблицю напрямних косинусів між локальними базисами поперечних перерізів в деформованому і недеформованому станах досліджуваної механічної конструкції.

З таблиці 1 бачимо, що система координат  $C_s^* x_s^* y_s^* z_s^*$  – квазіортогональна (з точністю до квадратів кутів повороту); з таблиці також впливає геометричний зміст коефіцієнтів  $b_1, b_2, c_1, c_2$ .

Таблиця 1  
Таблиця напрямних косинусів ортами координатних базисів в  $C_0$  та  $C_t$

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}_z^*$	$1 + c_1$	$b_1$	$-\frac{\partial v_0}{\partial z}$
$\bar{j}_z^*$	$-b_1$	$1 + b_2$	$-\frac{\partial w_0}{\partial z}$
$\bar{k}_z^*$	$\frac{\partial v_0}{\partial z}$	$\frac{\partial w_0}{\partial z}$	$1 + \frac{\partial u_0}{\partial z}$

Встановимо геометричний зміст величини  $b_1$ , яка входить у наведені вище формули. З теорії пружності відомо, що компоненти нескінченно малого повороту довільної матеріальної частинки визначаються згідно наступних формул [5]:

$$\begin{aligned}
 \Omega_z &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_2}{\partial x} - \frac{\partial U_1}{\partial y} \right), \quad \Omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_3}{\partial y} + \frac{\partial U_2}{\partial z} \right), \\
 \Omega_y &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_1}{\partial z} + \frac{\partial U_3}{\partial x} \right).
 \end{aligned} \tag{3}$$

З аналізу цих формул бачимо, що функція  $\Omega_z = b_1$  описує кручення ФЕП навколо вісі  $z$ ;  $\Omega_x$  – описує кут повороту внаслідок згину ФЕП в площині  $yOz$ ;  $\Omega_y$  – описує кут повороту внаслідок згину ФЕП в площині  $zOx$ .

### Формулювання рівнянь статики

Як було зазначено вище, механічну конструкцію інтерпретуємо як видовжену балку – стрижень з певним розподілом маси по поперечному перерізу, зовнішній контур якого залишається незмінним в процесі деформування. Масові та геометричні характеристики такої балки-стрижня будемо вважати зведеними до її пружної осі.

Для випадку загального тривимірного деформування балки – стрижня моментами та силами, що прикладені на її кінцях, диференціальні рівняння пружної осі стрижня мають вигляд аналогічний рівнянням руху важкого тіла, що обертається навколо деякої нерухомої точки. Таку аналогію між рівняннями динаміки твердого деформованого тіла [2] та рівняннями, що описують рівновагу нескінченно тонкого пружного циліндра – пружної осі, вперше відмітив Г. Кірхгоф [3].

Така аналогія дозволяє провести інтерпретацію динаміки твердого тіла, замінюючи дослідження еволюцій системи в часі аналізом форми пружної лінії.

В деформованому стані розглянемо елемент ФЕП, виділений двома площинами  $z, z + dz$ , які, наприклад, перпендикулярні до лінії центрів ваги конструкції (див. рис. 2). Розглянемо пружний стрижень (ФЕП) до кінців якого прикладені постійні зовнішня сила та момент сил. Нехай  $l$  – довжина дуги стрижня,  $dl$  – заданий елемент стрижня. Зв'яжемо з кожним поперечним перерізом стрижня свою систему відліку  $C_s^* x_s^* y_s^* z_s^*$ , результуючі вектори сили та моменту (від дії напружень в досліджуваному перерізі) позначимо  $\bar{F}^z, \bar{M}^z$  відповідно. Тоді, згідно з аналогією Кірхгофа [2], рівняння рівноваги, що виражають зв'язок між силою та моментом на кінцях в кожному перерізі ФЕП мають наступний вигляд

$$\frac{d\bar{M}^z}{dl} = \bar{M}^z \times \bar{\omega} + \bar{F}^z \times \bar{k}_z^* \tag{4}$$

де  $\bar{\omega} = \chi \bar{i} + \chi' \bar{j} + \tau \bar{k}$  – вектор, складовими якого є компоненти кривизни пружної лінії та ступінь кру-

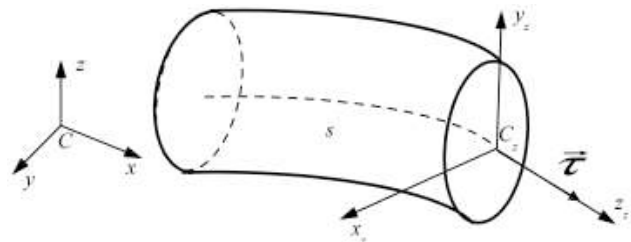


Рис.2. Виділений елемент ФЕП



чення розглядуваного стрижня для випадку кінематичної аналогії вектор  $\vec{\omega}$  можна інтерпретувати як вектор кутової швидкості обертання системи координат, зв'язаної з перерізом, тобто швидкість повороту системи координат в залежності від довжини дуги  $l$ ,  $\vec{k}_z^*$  — одиничний вектор, що направлений по дотичній до осі стрижня (одиничний орт осі  $C_z z^*$ ).

Величини  $\vec{F}^z$ ,  $\vec{M}^z$  представимо у вигляді розкладів на орти системи координат  $C_z x_z^* y_z^* z_z^*$  наступним чином:

$$\begin{aligned} \vec{F}^z &= F_x^* \vec{k}_x^* + F_y^* \vec{j}_y^* + F_z^* \vec{i}_z^*, \\ \vec{M}^z &= M_x^* \vec{k}_x^* + M_y^* \vec{i}_y^* + M_z^* \vec{j}_z^* = C\tau \vec{k}_x^* + A\chi \vec{i}_y^* + B\chi \vec{j}_z^* \end{aligned} \quad (5)$$

де  $C, A, B$  — постійні величини, які залежать від матеріалу та форми поперечного перерізу ФЕП.

Компоненти кривизни пружної лінії  $\chi, \chi'$  та ступінь кручення  $\tau$  згідно з [4] та таблиці напрямних косинусів (табл. 1) представимо наступним чином:

$$\chi = -\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \quad \chi' = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad \tau = \frac{\partial b_1}{\partial z}, \quad \text{припускаючи при цьому } dl \approx dz.$$

Розкладаючи векторне рівняння (4) на орти системи координат  $C_z x_z^* y_z^* z_z^*$ , отримаємо систему скалярних рівнянь виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial z} &= M_y \tau - M_z \chi' + F_y = M_y \frac{\partial b_1}{\partial z} - M_z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + F_y, \\ \frac{\partial M_y}{\partial z} &= M_z \chi - M_x \tau - F_x = -M_z \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - M_x \frac{\partial b_1}{\partial z} - F_x, \\ \frac{\partial M_z}{\partial z} &= M_x \chi' - M_y \chi = M_x \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - M_y \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

враховуючи в (6) вирази (5) та табл.1, отримаємо

$$\begin{aligned} A \frac{\partial \chi}{\partial z} - (B-C) \chi' \tau &= -A \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} - (B-C) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \frac{\partial b_1}{\partial z} = F_y, \\ B \frac{\partial \chi'}{\partial z} - (C-A) \tau \chi &= B \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} + (C-A) \frac{\partial b_1}{\partial z} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -F_x, \\ C \frac{\partial \chi'}{\partial z} - (A-B) \chi' \chi &= C \frac{\partial^2 b_1}{\partial z^2} + (A-B) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Рівняння (6) описують деформування елемента гнучкого видовженого стрижня для випадку малих деформацій але великих прогинів та кутів закручування. Такі рівняння описують поведінку елемента  $dl$  розглядуваного механічного об'єкту в статичній рівновазі.

### Формулювання векторних рівнянь руху

Для дослідження задач динамічного деформування ФЕП виведемо векторні рівняння, що описують поведінку досліджуваного видовженого стрижня — ФЕП при дії на нього динамічних навантажень.

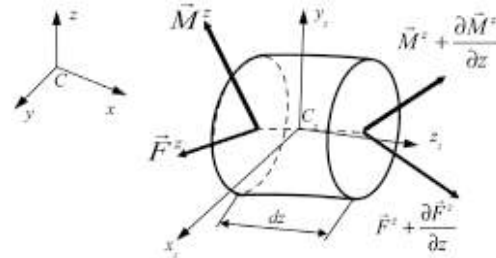


Рис 3. Силви і моменти навантаження елемента ФЕП

Для цього в деформованому стані, як було зазначено вище, виділимо елемент ФЕП двома площинами  $z, z + dz$ , які перпендикулярні лінії центрів його ваги. Позначаємо через  $q_z$  масу одиниці довжини ФЕП; через  $\vec{P}_z, \vec{m}_z$  вектори інтенсивностей розподілених по поверхні ФЕП зовнішніх силвих і моментних навантажень. Маємо ситуацію зображену на рис. 3.

Позначимо вектор інтенсивності поверхневого навантаження  $\vec{f} = \vec{f}(z, s)$ , де  $s$  — дугова координата контуру  $L_z$  ФЕП в заданому перерізі  $z$ . Приведемо вказане зовнішнє навантаження до центру мас перерізу. Тоді його головний вектор і головний момент будуть визначатися формулами

$$\vec{P}_z = \int_{L_z} \vec{f}(z, s) ds, \quad \vec{m}_z = \int_{L_z} \vec{r}_L \times \vec{f}(z, s) ds, \quad (8)$$

де  $\vec{r}_L$  — радіус-вектор від центру мас до точок, що знаходяться на контурі поперечного перерізу ФЕП.

Для виводу рівняння, що описує рух центру мас виділеного елемента, застосуємо теорему про зміну кількості руху. Маємо

$$q_z \frac{\partial^2 \vec{u}_0}{\partial t^2} = \frac{\partial \vec{F}^z}{\partial z} + \vec{P}_z \quad (9)$$

де  $\vec{F}^z$  — вектор зусиль від дії напружень в конкретному поперечному перерізі ФЕП,  $\vec{u}_0$  — вектор переміщення точок його осі.

Застосовуючи теорему про зміну кінетичного моменту, одержуємо друге векторне рівняння, що описує обертальний рух елемента навколо його центра мас. При цьому використовуючи також рівняння (4), отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{K}_{Cz} = \frac{\partial \vec{M}^z}{\partial z} + \vec{k}_z^* \times \vec{T}^z + \vec{m}_z \quad (10)$$

Позначаємо через  $\vec{K}_{Cz}$  — вектор кінетичного моменту виділеного елемента ФЕП.

Кутові швидкості виділеного елемента ФЕП  $\omega_x, \omega_y$  та  $\omega_z$  визначаються на основі формул (3) і можуть бути представлені як

$$\omega_x \approx \frac{\partial b_1}{\partial t}, \quad \omega_x \approx -\frac{\partial^2 w_0}{\partial z \partial t}, \quad \omega_y \approx -\frac{\partial^2 v_0}{\partial z \partial t}, \quad (11)$$

де  $b_1, \frac{\partial w_0}{\partial z}, \frac{\partial v_0}{\partial z}$  — кути повороту виділеного елемента ФЕП навколо осей  $C_z z, C_x x, C_y y$  відповідно.



Остаточно маємо два векторних рівняння руху (9) і (10) виділеного елемента ФЕР, на основі яких можна проводити дослідження його динамічного деформування.

**Формулювання скалярних рівнянь руху**

В рівняннях (9), (10) покладаємо

$$\begin{aligned} \vec{u}_0 &= u_0 \vec{k}_z + w_0 \vec{j}_z + v_0 \vec{i}_z, \\ \vec{F}^* &= F_z^* \vec{k}_z + F_y^* \vec{j}_z + F_x^* \vec{i}_z = F_z \vec{k}_z + F_y \vec{j}_z + F_x \vec{i}_z, \\ \vec{p}_z &= p_{z,z} \vec{k}_z + p_{z,y} \vec{j}_z + p_{z,x} \vec{i}_z = p_{z,z} \vec{k}_z + p_{z,y} \vec{j}_z + p_{z,x} \vec{i}_z, \\ \vec{M}^* &= M_z^* \vec{k}_z + M_y^* \vec{j}_z + M_x^* \vec{i}_z = M_z \vec{k}_z + M_y \vec{j}_z + M_x \vec{i}_z, \\ \vec{m}_z &= m_{z,z} \vec{k}_z + m_{z,y} \vec{j}_z + m_{z,x} \vec{i}_z = m_{z,z} \vec{k}_z + m_{z,y} \vec{j}_z + m_{z,x} \vec{i}_z. \end{aligned} \quad (12)$$

Приймаючи до уваги таблицю напрямних косинусів (табл. 1), маємо

$$\begin{aligned} F_z &= \left(1 + \frac{\partial u_0}{\partial z}\right) F_z^* - \frac{\partial w_0}{\partial z} F_y^* - \frac{\partial v_0}{\partial z} F_x^*, \\ F_y &= \frac{\partial w_0}{\partial z} F_z^* + (1 + b_1) F_y^* + b_1 F_x^*, \\ F_x &= \frac{\partial v_0}{\partial z} F_z^* - b_1 F_y^* + (1 + c_1) F_x^*, \\ p_{z,z} &= \left(1 + \frac{\partial u_0}{\partial z}\right) p_{z,z}^* - \frac{\partial w_0}{\partial z} p_{z,y}^* - \frac{\partial v_0}{\partial z} p_{z,x}^*, \\ p_{z,y} &= \frac{\partial w_0}{\partial z} p_{z,z}^* + (1 + b_2) p_{z,y}^* + b_1 p_{z,x}^*, \\ p_{z,x} &= \frac{\partial v_0}{\partial z} p_{z,z}^* - b_1 p_{z,y}^* + (1 + c_1) p_{z,x}^*, \\ M_z &= \left(1 + \frac{\partial u_0}{\partial z}\right) M_z^* - \frac{\partial w_0}{\partial z} M_y^* - \frac{\partial v_0}{\partial z} M_x^*, \\ M_y &= \frac{\partial w_0}{\partial z} M_z^* + (1 + b_2) M_y^* + b_1 M_x^*, \\ M_x &= \frac{\partial v_0}{\partial z} M_z^* - b_1 M_y^* + (1 + c_1) M_x^*, \\ m_{z,z} &= \left(1 + \frac{\partial u_0}{\partial z}\right) m_{z,z}^* - \frac{\partial w_0}{\partial z} m_{z,y}^* - \frac{\partial v_0}{\partial z} m_{z,x}^*, \\ m_{z,y} &= \frac{\partial w_0}{\partial z} m_{z,z}^* + (1 + b_2) m_{z,y}^* + b_1 m_{z,x}^*, \\ m_{z,x} &= \frac{\partial v_0}{\partial z} m_{z,z}^* - b_1 m_{z,y}^* + (1 + c_1) m_{z,x}^*. \end{aligned} \quad (13)$$

Після підстановки в векторні рівняння розкладів силових та кінематичних характеристик (12), одержуємо систему нелінійних скалярних взаємопов'язаних рівнянь руху відносно силових і кінематичних характеристик, означених в недеформованому стані:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} F_z + p_{z,z} &= \rho \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial}{\partial z} F_y + p_{z,y} &= \rho \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial}{\partial z} F_x + p_{z,x} &= \rho \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} M_z + m_{z,z} + F_y \frac{\partial v_0}{\partial z} - F_x \frac{\partial w_0}{\partial z} &= \frac{\partial K_z}{\partial t}; \\ \frac{\partial}{\partial z} M_y + m_{z,y} + F_x \left(1 + \frac{\partial u_0}{\partial z}\right) - F_z \frac{\partial v_0}{\partial z} &= \frac{\partial K_y}{\partial t}; \\ \frac{\partial}{\partial z} M_x + m_{z,x} + F_z \frac{\partial w_0}{\partial z} - F_y \left(1 + \frac{\partial u_0}{\partial z}\right) &= \frac{\partial K_x}{\partial t}. \end{aligned} \quad (15)$$

Рівняння (15), з врахуванням означення кінематичних та силових характеристик в деформованому стані (13), приймуть наступний вигляд:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial z} \left[ \left(1 + \frac{\partial u_0}{\partial z}\right) F_z^* - \frac{\partial w_0}{\partial z} F_y^* - \frac{\partial v_0}{\partial z} F_x^* \right] + \\ &+ \left[ \left(1 + \frac{\partial u_0}{\partial z}\right) p_{z,z}^* - \frac{\partial w_0}{\partial z} p_{z,y}^* - \frac{\partial v_0}{\partial z} p_{z,x}^* \right] = \rho \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}; \\ &\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial w_0}{\partial z} F_z^* + (1 + b_1) F_y^* + b_1 F_x^* \right] + \\ &+ \left[ \frac{\partial w_0}{\partial z} p_{z,z}^* + (1 + b_2) p_{z,y}^* + b_1 p_{z,x}^* \right] = \rho \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}; \\ &\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial v_0}{\partial z} F_z^* - b_1 F_y^* + (1 + c_1) F_x^* \right] + \\ &+ \left[ \frac{\partial v_0}{\partial z} p_{z,z}^* - b_1 p_{z,y}^* + (1 + c_1) p_{z,x}^* \right] = \rho \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}; \\ &\frac{\partial}{\partial z} \left[ \left(1 + \frac{\partial u_0}{\partial z}\right) M_z^* - \frac{\partial w_0}{\partial z} M_y^* - \frac{\partial v_0}{\partial z} M_x^* \right] + \\ &+ \left[ \left(1 + \frac{\partial u_0}{\partial z}\right) m_{z,z}^* - \frac{\partial w_0}{\partial z} m_{z,y}^* - \frac{\partial v_0}{\partial z} m_{z,x}^* \right] + \\ &+ \left[ \frac{\partial v_0}{\partial z} M_z^* - b_1 M_y^* + (1 + c_1) M_x^* \right] + \\ &+ \left[ \frac{\partial v_0}{\partial z} m_{z,z}^* - b_1 m_{z,y}^* + (1 + c_1) m_{z,x}^* \right] + \\ &+ \left[ \left(1 + \frac{\partial u_0}{\partial z}\right) F_z^* - \frac{\partial w_0}{\partial z} F_y^* - \frac{\partial v_0}{\partial z} F_x^* \right] \frac{\partial w_0}{\partial z} - \frac{\partial K_z}{\partial t} \\ &- \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial w_0}{\partial z} M_z^* + (1 + b_1) M_y^* + b_1 M_x^* \right] - \right. \\ &- \left. \left[ \frac{\partial w_0}{\partial z} m_{z,z}^* + (1 + b_2) m_{z,y}^* + b_1 m_{z,x}^* \right] + \right. \\ &+ \left. \left[ \left(1 + \frac{\partial u_0}{\partial z}\right) F_z^* - \frac{\partial w_0}{\partial z} F_y^* - \frac{\partial v_0}{\partial z} F_x^* \right] \frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial K_y}{\partial t} \right] \times \end{aligned} \quad (17)$$



$$\begin{aligned} & \times \frac{\partial w_0}{\partial z} = \frac{\partial K_z}{\partial t} \\ & \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial w_0}{\partial z} M_z^* + (1+b_2) M_y^* + b_1 M_x^* \right] + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{\partial w_0}{\partial z} m_{z,z}^* + (1+b_2) m_{z,y}^* + b_1 m_{z,x}^* \right] + \right. \\ & \left. - \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial w_0}{\partial z} M_z^* + (1+b_2) M_y^* + b_1 M_x^* \right] - \right. \right. \\ & \left. + \left[ \frac{\partial w_0}{\partial z} m_{z,z}^* + (1+b_2) m_{z,y}^* + b_1 m_{z,x}^* \right] + \right. \\ & \left. + \left[ \left( 1 + \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) F_z^* - \frac{\partial w_0}{\partial z} F_y^* - \frac{\partial v_0}{\partial z} F_x^* \right] \frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial K_y}{\partial t} \right] \\ & \times \left( 1 + \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) - \left[ \left( 1 + \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) F_z^* - \frac{\partial w_0}{\partial z} F_y^* - \frac{\partial v_0}{\partial z} F_x^* \right] \frac{\partial v_0}{\partial z} = \frac{\partial K_y}{\partial t}; \\ & \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial v_0}{\partial z} M_z^* - b_1 M_y^* + (1+c_1) M_x^* \right] + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{\partial v_0}{\partial z} m_{z,z}^* - b_1 m_{z,y}^* + (1+c_1) m_{z,x}^* \right] + \right. \\ & \left. + \left[ \left( 1 + \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) F_z^* - \frac{\partial w_0}{\partial z} F_y^* - \frac{\partial v_0}{\partial z} F_x^* \right] \frac{\partial w_0}{\partial z} - \right. \\ & \left. - \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial v_0}{\partial z} M_z^* - b_1 M_y^* + (1+c_1) M_x^* \right] + \right. \right. \\ & \left. + \left[ \frac{\partial v_0}{\partial z} m_{z,z}^* - b_1 m_{z,y}^* + (1+c_1) m_{z,x}^* \right] + \right. \\ & \left. + \left[ \left( 1 + \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) F_z^* - \frac{\partial w_0}{\partial z} F_y^* - \frac{\partial v_0}{\partial z} F_x^* \right] \frac{\partial w_0}{\partial z} - \frac{\partial K_x}{\partial t} \right] \\ & \times \left( 1 + \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) = \frac{\partial K_x}{\partial t}. \end{aligned}$$

Проводимо спрощення отриманих рівнянь (16) та (17) і отримуємо

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial F_z^*}{\partial z} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} F_y^* - \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} F_x^* + \right. \\ & \left. + \left[ \left( 1 + \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) p_{z,z}^* - \frac{\partial w_0}{\partial z} p_{z,y}^* - \frac{\partial v_0}{\partial z} p_{z,x}^* \right] \right] = \rho \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}; \\ & \left[ \frac{\partial F_y^*}{\partial z} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} F_z^* + \frac{\partial b_1}{\partial z} F_x^* + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{\partial w_0}{\partial z} p_{z,z}^* + (1+b_2) p_{z,y}^* + b_1 p_{z,x}^* \right] \right] = \rho \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}; \\ & \left[ \frac{\partial F_x^*}{\partial z} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} F_z^* - \frac{\partial b_1}{\partial z} F_y^* + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{\partial v_0}{\partial z} p_{z,z}^* - b_1 p_{z,y}^* + (1+c_1) p_{z,x}^* \right] \right] = \rho \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{\partial M_z^*}{\partial z} - M_y^* \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} - M_x^* \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} - m_{z,y}^* \frac{\partial w_0}{\partial z} - m_{z,x}^* \frac{\partial v_0}{\partial z} = \frac{\partial K_z}{\partial t},$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial M_y^*}{\partial z} + M_z^* \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} - M_x^* \frac{\partial b_1}{\partial z} + F_x^* + m_{z,y}^* + b_1 m_{z,x}^* = \frac{\partial K_y}{\partial t}, \quad (19) \\ & \frac{\partial M_x^*}{\partial z} + M_z^* \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} - M_y^* \frac{\partial b_1}{\partial z} - F_y^* - b_1 m_{z,y}^* + m_{z,x}^* = \frac{\partial K_x}{\partial t}. \end{aligned}$$

Після проведених спрощень отримані нелінійні взаємопов'язані скалярні рівняння лінійних переміщень (18) та згинно – крутильних коливань (19) досліджуваного елемента ФЕП.

Аналізуючи рівняння (19) приходимо до висновку, що вони містять в собі рівняння (6), тобто рівняння статичні, які, в свою чергу, були нами виведені як диференціальні рівняння пружної осі стрижня і які мають вигляд аналогічний рівнянням руху важкого тіла, що обертається навколо деякої нерухомої точки, згідно аналогії Кірхгофа, який першим відмітив зв'язок між диференціальними рівняннями пружної лінії та рівняннями, що описують рівновагу нескінченно тонкого пружного циліндра [3]. Саме такий підхід широко використовується при математичному описі явищ деформації механічних конструкцій, при яких наявні великі прогини та кути закручування.

## Висновки

Сформульовано рівняння статичні та векторні рівняння руху елемента фільтроежекційного пристрою як механічної конструкції, яку інтерпретовано у вигляді видовженого гнучкого стрижня. На основі виведених векторних рівнянь отримана система скалярних взаємозв'язаних нелінійних рівнянь руху ФЕП, на основі яких можна досліджувати різного типу коливальні процеси, які можуть виникати в ФЕП; розв'язувати задачі статичної та динамічної стійкості. Виходячи з отриманої системи нелінійних взаємозв'язаних скалярних рівнянь руху ФЕП, можна отримувати спрощені частинні варіанти скалярних рівнянь руху. Ці рівняння можуть бути використані для проведення інженерних досліджень, та для розв'язку конкретних задач щодо опису динамічної поведінки ФЕП при його експлуатації.

## Література

1. Каюк Я.Ф., Мариношенко О.П. Метод побудови характеристик напруженого і деформованого стану крил літаків / Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2004. – №3 – С.83-89.
2. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 384 с.
3. Тимошенко С.П., Гере Дж. Механика материалов. М.: Мир, 1976. – 669 с.
4. Ляв А. Математическая теория упругости. М.: ОНТИ, 1935. – 674 с.
5. Новожилов В.В. Теория упругости – Л.: Судпромгиз, 1958. – 372 с.